

COMPETENC  
OCDE  
APRENDIZAJES  
MATEMÁTICA  
EDUCACIÓN  
DOCENCIA  
ACTIVIDADES  
FORMULAR  
EMPLEAR  
INTERPRETAR

# PISA 2012: PISA EN EL PERÚ.

Informe pedagógico de resultados  
PISA 2012 en Matemática



COMPETENCIA  
OCDE  
APRENDIZAJES  
MATEMÁTICA  
EDUCACIÓN  
DOCENCIA  
ACTIVIDADES  
FORMULAR  
EMPLLEAR  
INTERPRETAR

# PISA 2012: PISA EN EL PERÚ.

Informe pedagógico de resultados  
PISA 2012 en Matemática



PERÚ

Ministerio  
de Educación

**JAIME SAAVEDRA CHANDUVI**  
MINISTRO DE EDUCACIÓN DEL PERÚ

**JUAN PABLO SILVA MACHER**  
VICEMINISTRO DE GESTIÓN INSTITUCIONAL

**FLAVIO FELIPE FIGALLO RIVADENEYRA**  
VICEMINISTRO DE GESTIÓN PEDAGÓGICA

**JORGE MANUEL MESINAS MONTERO**  
SECRETARIO DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA

**LILIANA MIRANDA MOLINA**  
OFICINA DE MEDICIÓN DE LA CALIDAD DE LOS APRENDIZAJES

**PISA 2012: PISA EN EL PERÚ.**  
**INFORME PEDAGÓGICO DE RESULTADOS PISA 2012 EN MATEMÁTICA**  
**1<sup>ERA</sup> EDICIÓN, LIMA 2015**

ISBN N° 978-9972-246-77-7

#### **Responsables de la elaboración del informe**

**María Elena Marcos Nicho**  
Especialista del área de Matemática

**Karim Boccio Zúñiga**  
Coordinadora técnica de la evaluación PISA

**Alberto Pool Romero**  
Consultor externo

**Héctor Ernesto Viale Tudela**  
Consultor externo

**Manuel Ángel Núñez Chumpitazi**  
Consultor externo

#### **Análisis pedagógico**

Olimpia Castro Mora. Coordinadora del área de Matemática  
Carlos Baca. Especialista del área de Matemática  
Hubner Cristóbal. Especialista del área de Matemática  
Percy Merino. Especialista del área de Matemática  
Tulio Ozejo. Especialista del área de Matemática

Andrés Burga León y Tania Pacheco Valenzuela, integrantes de la UMC, revisaron los borradores del informe.

**Corrector de estilo:** Nae Hanashiro

**Diagramador:** Nilton Nakaza

© Ministerio de Educación del Perú, 2015  
Calle Del Comercio 193, San Borja  
Lima, Perú  
Teléfono: 615-5800  
www.minedu.gob.pe

Impreso por PUBLIGRAF HT S.A.C.  
Calle Juan Guillermo Moore 295 Santa Anita, Lima - Perú  
Abril 2015

Se autoriza citar o reproducir la totalidad o parte del presente documento, siempre y cuando se mencione la fuente.  
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2015-05463  
Impreso en el Perú / Printed in Peru

## Introducción

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA<sup>1</sup>) es una de las evaluaciones internacionales de mayor relevancia de los últimos años. La cantidad de países participantes así como las características mismas de la evaluación hacen de ella y sus resultados un insumo de primer nivel para diagnosticar, comparar, proponer intervenciones y hacer un seguimiento de la evolución de los desempeños de los estudiantes de 15 años en las competencias de Lectura, Matemática y Ciencia. Así, la evaluación PISA tiene por objetivo determinar con qué capacidades cuentan dichos estudiantes al terminar la educación obligatoria y en qué medida están preparados para asumir los retos que la sociedad contemporánea les impone.

En las evaluaciones PISA participan los países miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE<sup>2</sup>) instancia promotora de PISA y otros países que solicitan su participación.

Desde el inicio de PISA, en el año 2000, nuestro país ha participado en tres de los cinco procesos realizados hasta el momento y ha comprometido su participación en el proceso del 2015. En cada uno de ellos se enfatiza una de las áreas señaladas<sup>3</sup>. Así, en el año 2012 el énfasis de la evaluación se situó en el área de matemática.

El presente Informe pedagógico de resultados PISA 2012 tiene como propósito central difundir las características principales del marco teórico que sustenta la evaluación de la competencia matemática, los resultados en el proceso correspondiente al 2012 así como proponer un conjunto de recomendaciones pedagógicas que guíen las intervenciones de los docentes a partir de los hallazgos de dichos resultados.

Así, el primer capítulo, describe e ilustra conceptos tales como competencia matemática y las variables o categorías y subcategorías con las que esta competencia se operacionaliza en cada una de las preguntas usadas para su evaluación. Se incluyen en este capítulo algunos ítemes liberados de dominio público que ilustren de mejor manera cada una de las categorías y subcategorías mencionadas.

El segundo capítulo presenta los resultados correspondientes al proceso PISA 2012. Estos resultados se brindan tanto por puntaje promedio como por la proporción de estudiantes en cada uno de los niveles de desempeño de la competencia matemática en general. Asimismo se brindan resultados comparativos con otros países de la región y por cada una de las subcategorías desarrolladas en el capítulo precedente.

El tercer y último capítulo, brinda un conjunto de recomendaciones de tipo pedagógico que incluye pautas para el uso de los ítemes liberados en las clases de matemática, propuestas de aprendizaje con atención a la diversidad y sesiones para cada uno de los cuatro primeros grados del nivel secundario. Todos estos aportes con el común denominador de considerar tanto la concepción de matemática como las variables o categorías que el marco PISA plantea.

---

<sup>1</sup> Programme for International Student Assessment.

<sup>2</sup> La OCDE es una organización de carácter intergubernamental que está integrada por 30 países de Europa, Oceanía, Asia y América del Norte. Tiene su sede en París y lleva adelante estudios en todas las áreas del quehacer social y económico (agricultura, medio ambiente, energía, empleo, economía, salud, educación, etc.).

<sup>3</sup> En cada ciclo, el área focalizada se evalúa con un 70% de las preguntas propuestas; el 30% restante corresponde a las áreas no focalizadas.

Finalmente, en los anexos el docente podrá encontrar información adicional de gran utilidad para profundizar en la comprensión del modelo de evaluación que PISA propone así como ejemplos adicionales comentados y analizados de preguntas propuestas en procesos anteriores y que actualmente son de dominio público.

Esperamos que este informe pedagógico de resultados sea de utilidad para maestros, directores y en general para cualquier persona o institución interesada en la mejora de los aprendizajes de nuestros estudiantes.

# Índice

Presentación

<b>Capítulo 1: La evaluación de la Matemática en PISA</b>	13
1.1. Categoría: Procesos	16
1.1.1. Subcategoría: Formular	16
1.1.2. Subcategoría: Emplear	21
1.1.3. Subcategoría: Interpretar	24
1.2. Categoría: Contenidos	27
1.2.1. Subcategoría: Cantidad	28
1.2.2. Subcategoría: Cambio y relaciones	29
1.2.3. Subcategoría: Espacio y forma	31
1.2.4. Subcategoría: Incertidumbre y datos	33
1.3. Categoría: Contextos	36
1.3.1. Contexto: Personal	36
1.3.2. Contexto: Educacional	38
1.3.3. Contexto: Social	39
1.3.4. Contexto: Científico	40
<b>Capítulo 2: Resultados de Perú en PISA 2012</b>	45
2.1. Resultados de Perú en Matemática	45
2.2. Resultados de Perú por subcategoría de Matemática	48
<b>Capítulo 3: Pautas y recursos para enriquecer la práctica pedagógica en base a la evaluación PISA</b>	53
3.1. Uso de las preguntas de PISA en el aula de Matemática	53
3.2. Adaptación de situaciones al modelo PISA: con énfasis en la diversidad	75
3.3. Situaciones de aprendizaje clasificadas por grado	85
• Primer grado de secundaria. Estimación y cálculo del área	87
• Segundo grado de secundaria. Registro de puertos peruanos	92
• Segundo grado de secundaria. Estimación y cálculo del asfalto	98
• Tercer grado de secundaria. Producción y consumo de petróleo	103
• Tercer grado de secundaria. Capacidades y modelos cilíndricos	110
• Cuarto grado de secundaria. La refinería de petróleo	115
• Cuarto grado de secundaria. La altura de una torre de perforación	120
• Quinto grado de secundaria. El envase de lubricante	124
<b>Lista de referencias bibliográficas</b>	129
<b>Anexos</b>	
Anexo 1: Contenidos matemáticos del Diseño Curricular Nacional (DCN) y de los textos de secundaria asociados a las subcategorías de Matemática de la prueba PISA	133
Anexo 2: Definición de competencia matemática en PISA 2003 y PISA 2012	137
Anexo 3: Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso; Subcategoría: Formular	138

Anexo 4: Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso; Subcategoría: Emplear	144
Anexo 5: Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso; Subcategoría: Interpretar	148
Anexo 6: Niveles de desempeño por subcategoría	151

## Lista de tablas

Tabla 2.1.1	Niveles de desempeño en la competencia matemática	46
Tabla A1.1.	Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Cantidad	133
Tabla A1.2.	Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Cambio y relaciones	134
Tabla A1.3.	Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Espacio y forma	135
Tabla A1.4.	Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Incertidumbre y datos	136
Tabla A2.1.	Definición de la competencia matemática en PISA 2003 y en PISA 2012	137
Tabla A6.1.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Formular	152
Tabla A6.2.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Emplear	153
Tabla A6.3.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Interpretar	154
Tabla A6.4.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Cantidad	155
Tabla A6.5.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Cambio y relaciones	157
Tabla A6.6.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Espacio y forma	158
Tabla A6.7.	Niveles de desempeño en la competencia matemática: Incertidumbre y datos	159

## Lista de figuras

Figura 1.1.	Componentes principales del marco de trabajo de Matemática en PISA 2012	14
Figura 1.2.	Categorías y subcategorías de la competencia matemática en las preguntas de PISA 2012	15
Figura 1.3.	Distintos tipos de preguntas posibles en PISA 2012	16
Figura 1.1.1.1.	Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso Formular	17
Figura 1.1.1.2.	Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso Formular	18
Figura 1.1.1.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en el proceso Formular	19
Figura 1.1.1.4.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Formular	20
Figura 1.1.2.1.	Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso Emplear	21
Figura 1.1.2.2.	Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso Emplear	22
Figura 1.1.2.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en el proceso Emplear	23
Figura 1.1.2.4.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Emplear	24
Figura 1.1.3.1.	Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso Interpretar	25
Figura 1.1.3.2.	Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso	25

	Interpretar	
Figura 1.1.3.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Interpretar	26
Figura 1.1.3.4.	Posible resolución de la pregunta con énfasis en Interpretar	27
Figura 1.2.1.1.	Pregunta PISA de la subcategoría Cantidad	28
Figura 1.2.2.1.	Pregunta PISA de la subcategoría Cambio y relaciones	30
Figura 1.2.3.1.	Pregunta PISA de la subcategoría Espacio y forma	32
Figura 1.2.4.1.	Pregunta PISA de la subcategoría Incertidumbre y datos	34
Figura 1.3.1.1.	Pregunta PISA de contexto Personal	36
Figura 1.3.2.1.	Pregunta PISA de contexto Educativo	38
Figura 1.3.3.1.	Pregunta PISA de contexto Social	39
Figura 1.3.3.1.	Pregunta PISA de contexto Científico	40
Figura 2.1.1.	Distribución de los estudiantes peruanos de 15 años, según niveles de desempeño de Matemática	47
Figura 2.1.2.	Resultados de Matemática en países de Latinoamérica	48
Figura 2.2.1.	Resultados por subcategorías de Matemática	49
Figura 3.1.1.	Pregunta PISA del nivel Debajo del nivel 1	54
Figura 3.1.2.	Pregunta PISA del Nivel 1	57
Figura 3.1.3.	Pregunta PISA del Nivel 2	60
Figura 3.1.4.	Pregunta PISA del Nivel 3	64
Figura 3.1.5.	Pregunta PISA del Nivel 4	67
Figura 3.1.6.	Pregunta PISA del Nivel 5	69
Figura 3.1.7.	Pregunta PISA del Nivel 6	72
Figura 3.3.1.	Elementos de las actividades propuestas	86
Figura A3.1.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Formular	138
Figura A3.2.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Formular	139
Figura A3.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Formular	140
Figura A3.4.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Formular	141
Figura A3.5.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Formular	142
Figura A3.6.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Formular	143
Figura A4.1.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Emplear	144
Figura A4.2.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Emplear	145
Figura A4.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Emplear	146
Figura A4.4.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Emplear	147
Figura A5.1.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Interpretar	148
Figura A5.2.	Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Interpretar	149
Figura A5.3.	Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Interpretar	150



# La evaluación de la Matemática en PISA

CAPÍTULO

**1**



# CAPITULO 1

## 1. La evaluación de la Matemática en PISA

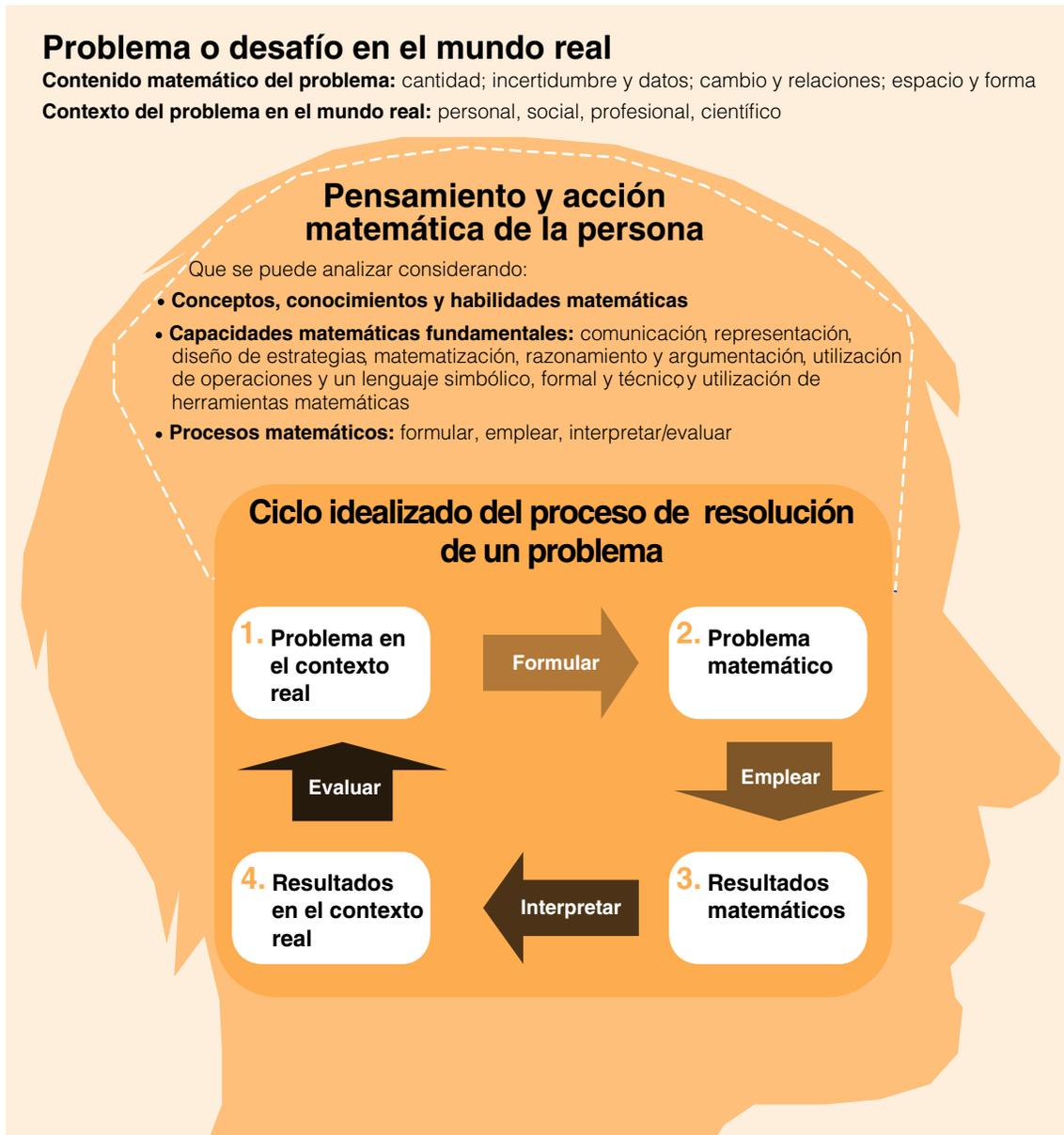
La finalidad principal del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), desarrollado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), es conocer en qué medida los estudiantes de 15 años de edad, próximos a culminar su educación obligatoria y seguir estudios superiores o ingresar al mercado laboral, son capaces de utilizar los conocimientos y habilidades necesarios para hacer frente a las situaciones y desafíos que les plantea la sociedad actual. Esta evaluación se realiza cada tres años y evalúa las competencias lectora, matemática y científica, enfatizándose en cada proceso una de estas competencias.

Así, PISA 2003 y PISA 2012 tuvieron como centro la evaluación de la competencia matemática. En ambas evaluaciones, se buscó establecer si los estudiantes son capaces de utilizar lo que han aprendido en Matemática a situaciones que simulan la vida cotidiana. En este sentido, para PISA, la competencia matemática no se reduce a dominar conceptos, terminología, simbología, datos o procedimientos matemáticos. Tampoco se limita a la habilidad para calcular y poner en práctica determinadas estrategias o métodos, sino más bien se concibe como una combinación de estos y otros elementos –como las motivaciones, expectativas y actitudes hacia la Matemática– que intervienen cuando un estudiante responde a los retos que se le plantean en diversas situaciones de la vida real.

En PISA 2012 se define la competencia matemática como “la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, predecir y explicar fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el rol que desempeña las matemáticas en el mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundadas requeridos por los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (PISA, 2012).

La competencia matemática PISA se muestra esquematizada en la Figura 1.1. En ella, de forma sintética, se representa la interacción que surge entre un problema propio del mundo real (recuadro exterior) y la persona que lo resuelve (silueta intermedia). La persona en interacción con el problema moviliza los recursos cognitivos que posee, tales como sus conocimientos, capacidades y destrezas, entre las que está un conjunto específico de capacidades que resultan fundamentales en la matemática. Todo ello permite reconocer en una situación problemática real los elementos relevantes y como estos se relacionan a través del planteamiento o formulación matemática del problema “real” en términos matemáticos. Una vez formulado este, el estudiante debe emplear las estrategias que permitan dar respuesta a dicho problema. Finalmente, el estudiante debe interpretar dicho resultado para dar respuesta al problema real planteado en su contexto original y valorar en qué medida se ha resuelto este.

**Figura 1.1. Componentes principales del marco de trabajo de Matemática en PISA 2012**



Adaptado de "Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias", por OECD, 2013C, p. 11.

### Categorías de la competencia matemática

Ante la complejidad de hacer evidente las diferentes formas y los distintos niveles en que se puede manifestar el ejercicio de la competencia matemática cuando una persona resuelve un problema, PISA estableció diversas **categorías** y subcategorías que ayudan a comprender, caracterizar y analizar los distintos aspectos que se involucran en la competencia matemática.

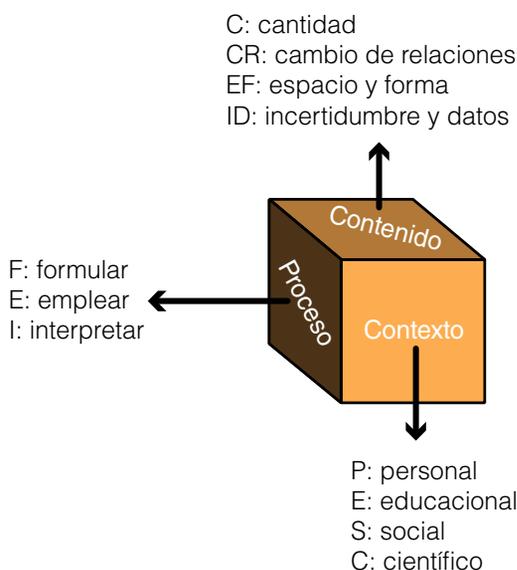
Las categorías y subcategorías establecidas por PISA se han representado en el esquema presentado en la Figura 1.1 y hacen referencia a:

- Los **procesos** que con mayor énfasis moviliza la persona al resolver un problema y cuyas subcategorías son: formular, emplear o interpretar.
- Los **contenidos** que caracterizan a un problema y que son identificados por la persona que lo resuelve y cuyas subcategorías son: cantidad, cambio y relaciones, espacio y forma, e incertidumbre y datos.
- Los **contextos** o ámbitos que involucra el problema a ser resuelto y cuyas subcategorías son: personal, educacional, social y científico.

Así, en cada problema planteado en PISA el **énfasis** en su resolución estará referido a un proceso, contenido y contexto particular.

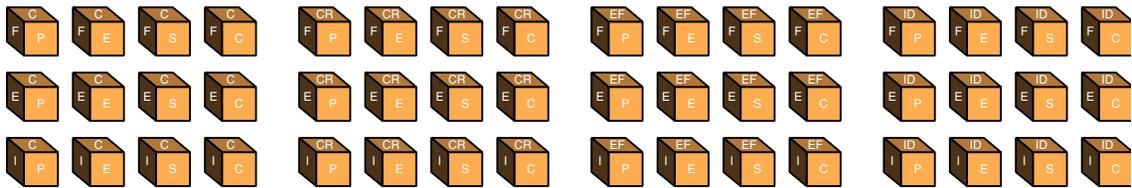
En ese sentido, el docente puede imaginar cada ítem como un dado con tres caras visibles. Cada cara representa una de las categorías mencionadas. La categoría Proceso que a su vez se descompone en las subcategorías formular, emplear e interpretar. La categoría Contenido que a su vez se descompone en las subcategorías: cantidad, cambio y relaciones, espacio y forma e incertidumbre y datos. Finalmente, la categoría Contexto, que se descompone en las subcategorías personal, educacional, social y científico (ver Figura 1.2)

**Figura 1.2. Categorías y subcategorías de la competencia matemática en las preguntas de PISA 2012**



Una combinación de estas categorías y subcategorías generan un total de 48 tipos distintos de preguntas posibles como se muestra en la Figura 1.3.

**Figura 1.3. Distintos tipos de preguntas posibles en PISA 2012**



Las categorías y subcategorías establecidas por PISA constituyen una descripción didáctica de lo que ocurre en la persona al momento de ejercer su competencia matemática en la resolución de un problema. No describen formas de enseñar o de aprender matemática pues, en la realidad, la persona desarrolla todas estas categorías de forma integrada; al resolver un problema no los ejerce de manera lineal o secuencial sino, por el contrario, lo hace de forma simultánea.

A continuación, se desarrolla de forma detallada cada una de ellas:

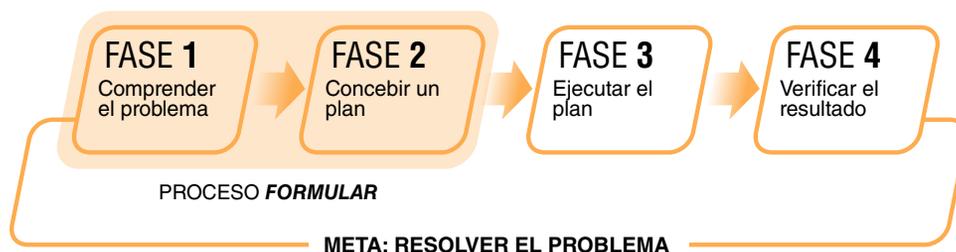
## 1.1. Categoría: Procesos

Los procesos matemáticos están formados por las capacidades matemáticas que se activan y movilizan cuando una persona analiza, razona y comunica ideas en actividades como la resolución de problemas matemáticos. PISA 2012 considera los procesos como parte de la definición de la competencia matemática y, en ella, hace referencia a la capacidad de la persona para **formular**, **emplear** e **interpretar** situaciones de contexto real. Estos tres términos brindan una estructura útil y valiosa para describir lo que hacen las personas para relacionar un problema contextualizado con la Matemática para lograr resolverlo.

### 1.1.1. Subcategoría: Formular

Se refiere a la capacidad de la persona para identificar oportunidades en las que debe razonar matemáticamente frente a un problema de contexto real, con el propósito de comprenderlo mejor y de facilitar su posterior resolución. Se puede afirmar que el proceso *Formular* forma parte de la resolución de problemas y suele ser la primera parte de esta, pues contribuye a dar forma matemática al problema para que, a partir de ella, se pueda continuar con su resolución. Este proceso coincide con las dos primeras fases que Polya (1965): Comprender el problema y Concebir un plan para resolverlo.

**Figura 1.1.1.1. Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso *Formular***



En este proceso, la persona asocia la información del problema a elementos y relaciones matemáticas que le permitan crear una organización conocida para dicha información. Esta organización contiene elementos propios de la Matemática y es llamada “estructura matemática”. Sin embargo, hay situaciones o problemas que tienen particularidades y la estructura matemática con la que es identificada requiere modificaciones o adaptaciones específicas, a partir de lo cual se crea un modelo matemático particular para dicho problema.

Este modelo es un esquema, representación o bosquejo que presenta de forma integrada, precisa y sintética, pero completa, la información del problema necesaria para resolverlo. Su finalidad es describir, explicar o comprender mejor el problema para poder resolverlo trabajando directamente con el modelo elaborado.

Para que un estudiante pueda describir o representar un problema con una estructura matemática o un modelo matemático, puede realizar una o varias actividades cognitivas, entre las cuales pueden estar algunas de las mostradas en la Figura 1.1.1.2.

En esta figura, se aprecia que, frente al problema, el estudiante recuerda y moviliza sus conocimientos y experiencias similares; de esta manera, identifica diversos aspectos que le permiten construir una representación matemática del problema.

**Figura 1.1.1.2. Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso *Formular***



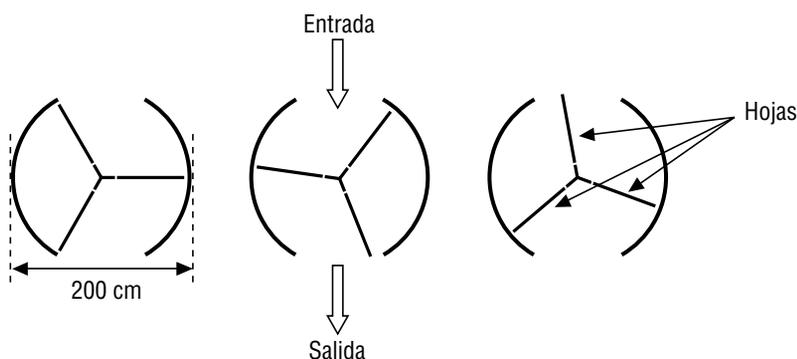
La representación final o el modelo obtenido como resultado no necesariamente tiene que ser único, sino que puede variar de persona a persona. Asimismo, las actividades cognitivas involucradas en este proceso no se presentan de forma aislada, ni consecutiva; por el contrario, se dan de forma simultánea, enriqueciéndose paulatinamente hasta lograr el modelo o representación matemática adecuada al problema inicial. Cabe anotar que, en algunas ocasiones, los estudiantes pueden juntar varias actividades cognitivas y representarlas en un único paso, lo que podría dificultar su análisis.

A continuación, se presenta un ejemplo de pregunta de la evaluación PISA en el que se enfatiza el proceso *Formular*. En dicho ejemplo, se brinda la información general de las características de la pregunta y se ha destacado aquellas formas en las que el estudiante puede concretizar el proceso *Formular*. Aun cuando en todo problema se requiere de distintas actividades cognitivas, para este tipo de preguntas es el proceso *Formular* en el que se centra la dificultad o núcleo de la pregunta.

**Figura 1.1.1.3. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en el proceso *Formular***

## PUERTA GIRATORIA

Una puerta giratoria tiene tres hojas que giran dentro de un espacio circular. El diámetro interior de este espacio es 2 metros (200 centímetros). Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.



### Pregunta

PM995Q03

La puerta da 4 vueltas completas en un minuto. Hay espacio para dos personas en cada uno de los tres sectores.

¿Cuál es el máximo número de personas que pueden entrar al edificio por la puerta en 30 minutos?

- A. 60
- B. 180
- C. 240
- D. 720

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Identifica información y construye un modelo cuantitativo (implícito) para resolver el problema.

**Contenido:** Cantidad

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Científico

**Medida:** 561

**Dificultad:** Nivel 5

**Respuesta correcta:** D. 720



*¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?*

*Las capacidades que sustentan este proceso son la comunicación, matematización y representación dadas al identificar, interpretar e inferir la información no explícita (en este caso cuantitativa), que es la base de la organización matemática (modelo) necesaria para resolver el problema.*

El proceso enfatizado –*Formular*– invita a describir matemáticamente el problema, y, luego, a resolverlo. En una resolución adecuada de la pregunta, podría observarse el proceso de la siguiente manera:

Figura 1.1.1.4. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Formular*

Problema: Número máximo de personas que entran por una puerta giratoria

### Actividades cognitivas y proceso del estudiante

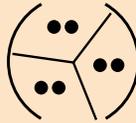
- Elementos relevantes y simplificación del problema:** Se selecciona solo la información pertinente en función a lo que se pide. Se establece una primera relación entre los datos del problema y los conocimientos matemáticos que se tienen.

**Resultado:**  
Puerta giratoria circular con 3 espacios. En cada espacio entran dos personas y da 4 vueltas en un minuto. Se quiere saber el máximo de personas en 30 minutos.

- Organización matemática representada:** Se relaciona lo seleccionado con elementos y relaciones matemáticas.

**Resultado:**

**Ejemplo 1**



**Ejemplo 3**



**Ejemplo 2**  
3 sectores ————— 1 vuelta  
2 personas por sector ————— }  
4 vueltas en un minuto  
¿cuántas personas en 30 minutos?

- Estructuras matemáticas:** se pueden reconocer diversas estructuras dependiendo del estudiante.

**Supuesto:** solo van 2 personas en cada sector, no se contemplan otros casos y se considera el valor máximo.

**Resultados:**

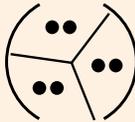
**Ejemplo 1**  
Multiplicación

**Ejemplo 2**  
Proporcionalidad

**Ejemplo 3**  
Multiplicación y proporcionalidad

### Resultado obtenido al resolver la pregunta

**Ejemplo 1**



$2 \times 3 \times 4 \times 30 = 720$

**Ejemplo 2**

6 personas ----- 1 vuelta  
24 personas ----- 4 vueltas

24 personas ----- 1 min  
720 personas ---- 30 min

**Ejemplo 3**



24 personas ----- 1 min  
720 personas ---- 30 min

En este caso, y en la mayor parte de procesos de resolución de problemas, no es posible conocer con precisión lo que ocurre en la mente del estudiante, debido a que usualmente se centra la atención en que el estudiante solo comunique la respuesta. Sin embargo, es posible que –a lo largo de las diversas clases de Matemática– se pueda favorecer el desarrollo de este proceso, generando preguntas específicas para que el estudiante atienda y tome conciencia de cada uno de los pasos que se podrían estar dando al resolver un problema. Así, será posible planificar y ejecutar una interacción

–mediante el diálogo, ficha de metacognición, resolución de problemas en voz alta u otros– que haga posible que los estudiantes evoquen y comuniquen los procesos que realizan al formular un problema y resolverlo.

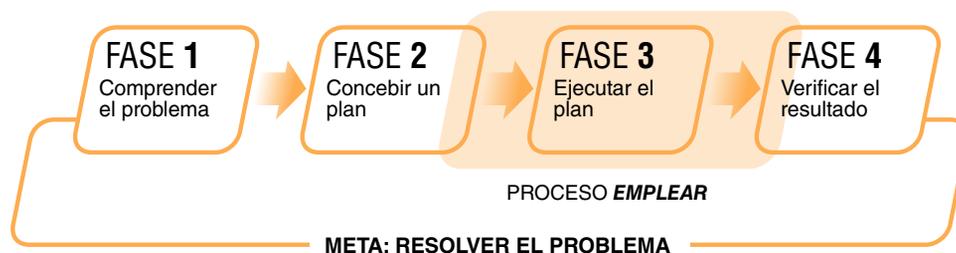
De otro lado, se debe destacar que, cuando el estudiante resuelve un problema –lo haga de forma adecuada o no–, usualmente lo que el docente observa es lo que el estudiante ha dejado anotado en el papel. Solo a través de la interpretación de ello se puede acceder a la formulación que el estudiante realizó, a los aciertos que tuvo, a sus dificultades y al razonamiento que realizó. Dentro de este esquema, se debe considerar que puede existir una adecuada formulación, pero con equivocaciones en otros procesos. Por ello, es importante incrementar las habilidades docentes para interpretar las respuestas de los estudiantes y para prever las múltiples alternativas de solución y posibles errores o dificultades en el proceso *Formular*.

### 1.1.2. Subcategoría: Emplear

Se refiere a la capacidad de la persona para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas que ya se encuentran formulados matemáticamente, o en los que este proceso no es el prioritario. Se recurre al proceso *Emplear* con el propósito de obtener la respuesta al problema, y llegar a conclusiones.

Si se establece un paralelo entre las fases de resolución de problemas identificadas por Polya y los procesos determinados por la evaluación PISA, se puede identificar una correspondencia entre el proceso *Emplear* y la Fase 3, con partes de la Fase 2 y de la Fase 4, como se visualiza en la Figura 1.1.2.1.

**Figura 1.1.2.1. Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso *Emplear***



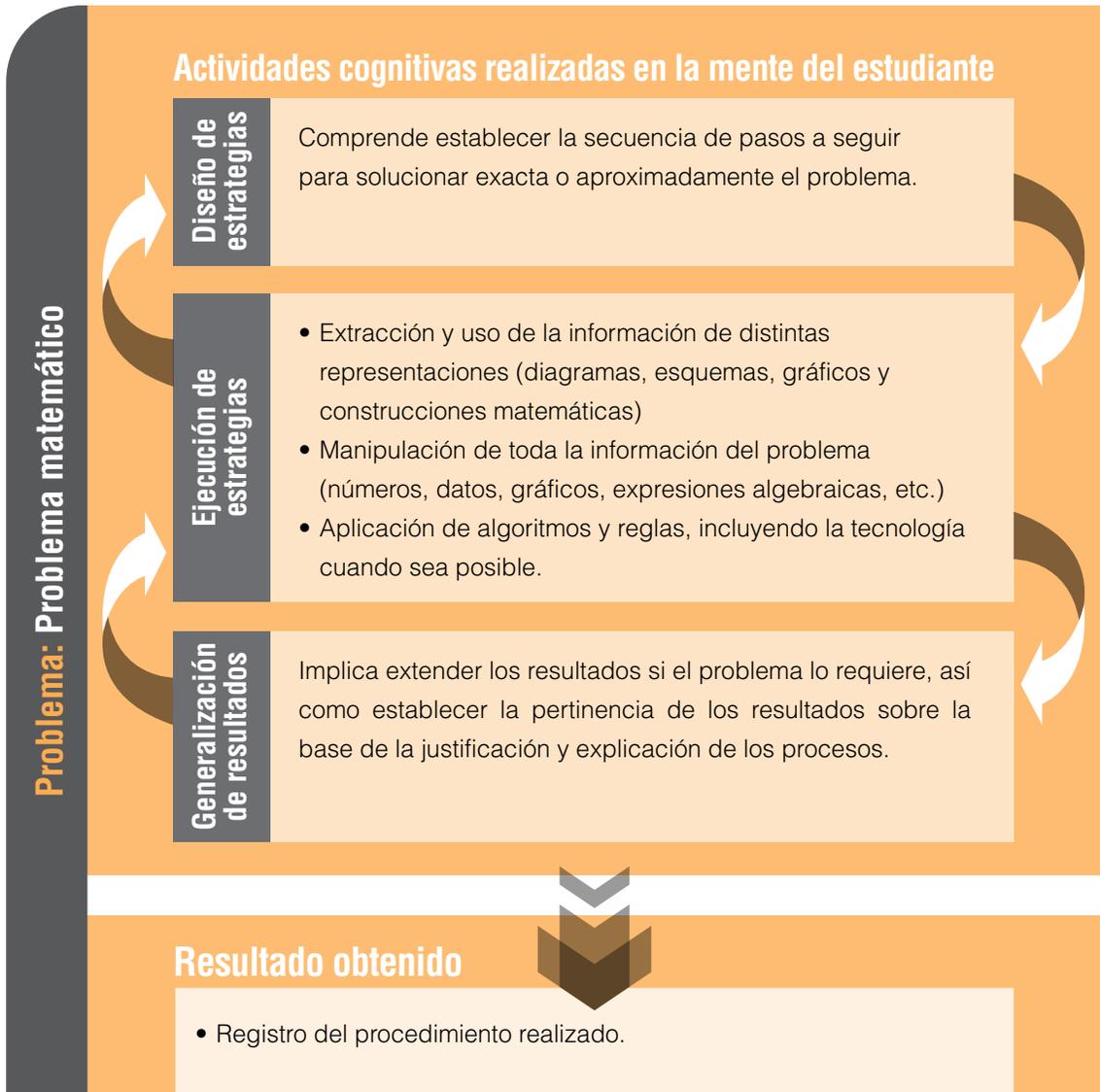
Como se observa, el proceso *Emplear* coincide mayoritariamente con la Fase 3 de la resolución de problemas. En esta fase, llamada *Ejecutar el plan*, los estudiantes aplican los distintos procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema, incluso, mediante el uso de herramientas tecnológicas si se lo solicitan o lo considera conveniente. Esta aplicación de procedimientos no es al azar, y se deriva de la formulación matemática indicada en el problema o del diseño de la estrategia que realiza el estudiante. En el esquema de Polya, esto corresponde a parte de la Fase 2 de *Concebir un plan*. En el diseño de la estrategia, el estudiante elige los procedimientos matemáticos que realizará y establece el orden en el que los aplicará; asimismo, les otorgará significado a cada paso que realiza.

Además, el proceso *Emplear* también incluye la revisión de los resultados obtenidos

de aplicación de los procedimientos. Este proceso se puede dar mediante la generalización de los resultados o la reflexión sobre los mismos, con el propósito de determinar si los resultados coinciden con la respuesta del problema o es necesaria alguna interpretación o paso adicional que permita llegar a la respuesta del problema.

Como se ha visto, el proceso *Emplear* incluye varias actividades que, en forma de esquema, se presentan en la figura 1.1.2.2.

**Figura 1.1.2.2. Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso *Emplear***



A continuación, se presenta un ejemplo de pregunta de la evaluación PISA en el que se ha priorizado el proceso *Emlear*. Además, se presenta la ficha resumen respectiva y se enfatiza en los posibles pasos seguidos por un estudiante al recurrir a este proceso en la resolución del problema que se plantea.

**Figura 1.1.2.3. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Emplear**

## ELENA LA CICLISTA

Elena acaba de comprar una nueva bicicleta que tiene un velocímetro colocado sobre el timón.

El velocímetro le indica a Elena la distancia recorrida y la velocidad promedio del trayecto.



### Pregunta

PM957Q01

En un trayecto, Elena recorrió 4 km en los primeros 10 minutos; y, luego, 2 km en los siguientes 5 minutos.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A. La velocidad promedio de Elena fue mayor durante los primeros 10 minutos que durante los siguientes 5 minutos.
- B. La velocidad promedio de Elena fue la misma durante los primeros 10 minutos y durante los 5 minutos siguientes.
- C. La velocidad promedio de Elena fue menor durante los primeros 10 minutos que durante los 5 minutos siguientes.
- D. No es posible afirmar algo acerca de la velocidad promedio de Elena a partir de la información dada.

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Compara la velocidad promedio a partir dadas las distancia recorrida y un tiempo dado

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Personal

**Medida:** 341

**Dificultad:** Nivel 3

**Respuesta:** correcta B La velocidad promedio de Elena fue la misma durante los primeros 10 minutos y durante los 5 minutos siguientes



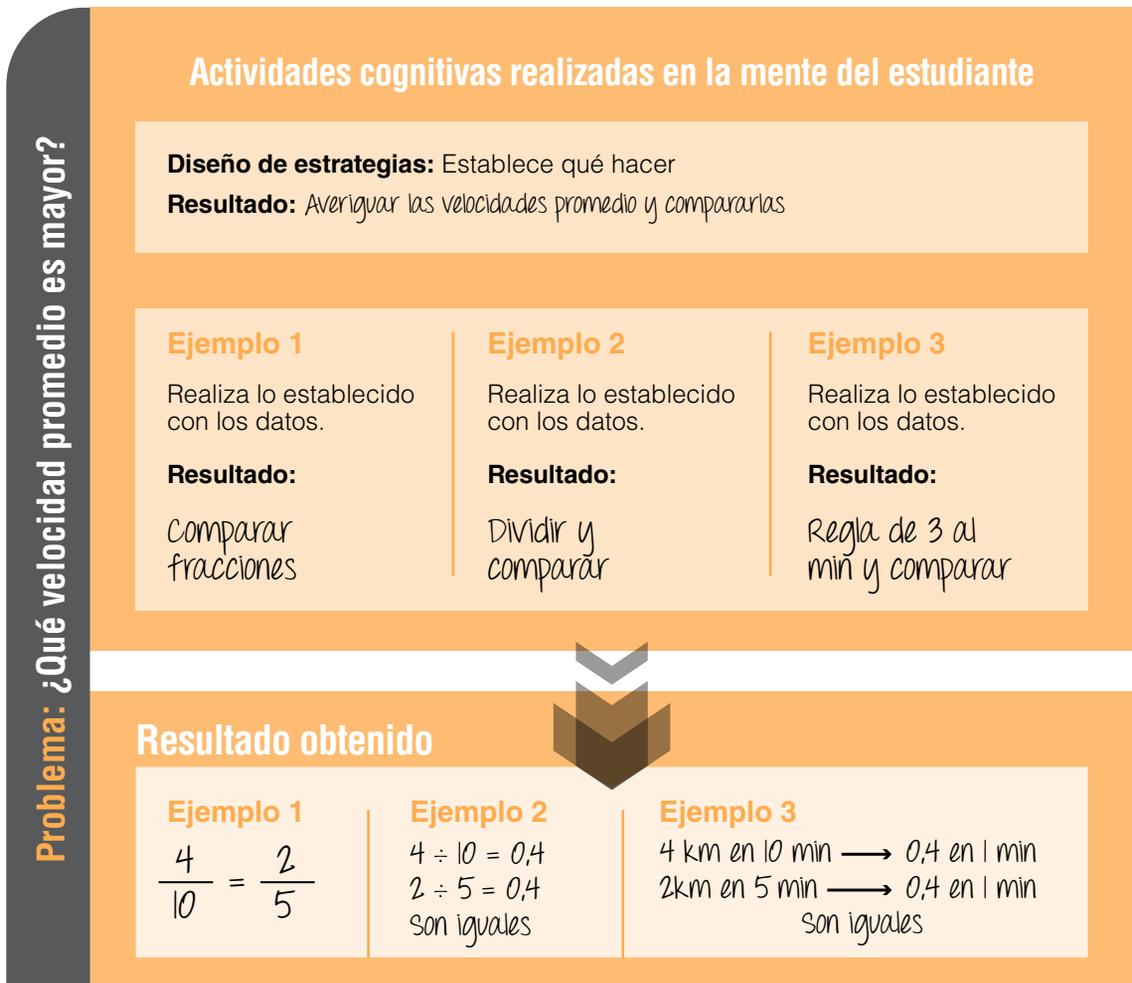
*¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?*

*El diseño de estrategias y el razonamiento y argumentación son las capacidades que permiten al estudiante utilizar sus conocimientos matemáticos para responder al problema presentado.*

En la siguiente figura, se muestra el posible proceso seguido por un estudiante frente al problema anterior. Se debe tener en cuenta que no siempre los estudiantes registran por escrito el proceso seguido. Aun cuando se trate de procesos de resolución sencillos como el de la pregunta presentada, este puede ser realizado mentalmente y solo se

podrá observar la alternativa marcada, por ello sería recomendable que se informe a los estudiantes que el registro de su razonamiento es importante para reconocer sus avances y sus dificultades.

**Figura 1.1.2.4. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Emplear***

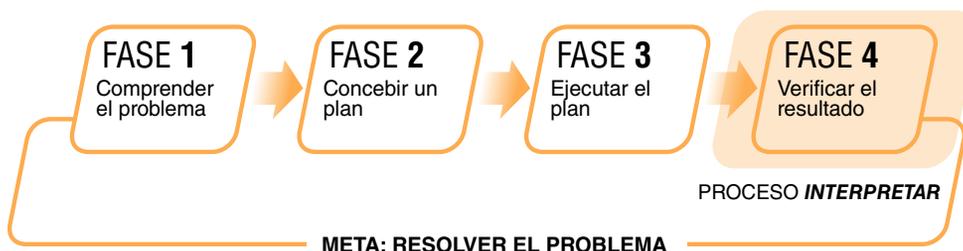


En la figura anterior, se muestra que el proceso *Emplear* se centra en la ejecución de una estrategia de diseño casi inmediato, basado en la noción de velocidad promedio. Una vez que se identifica la noción, solo se requiere contar con los datos indispensables para realizar el cálculo respectivo y comparar.

### 1.1.3. Subcategoría: Interpretar

Se centra en la capacidad de la persona para reflexionar acerca de soluciones, resultados o conclusiones matemáticas, e interpretarlas en el contexto de los problemas de la vida real. A partir de un paralelo entre las fases de resolución de problemas identificadas por Polya y los procesos considerados por la evaluación PISA, se puede afirmar que existe correspondencia entre el proceso *Interpretar* y la Fase 4, como se visualiza a continuación.

**Figura 1.1.3.1. Las fases de Polya para resolver problemas y el proceso *Interpretar***



El proceso *Interpretar* coincide con la Fase 4 de Polya, porque en ambos casos se verifica o valida el resultado obtenido en función del contexto del problema, y se determina si el resultado es directamente la respuesta del problema o requiere de una interpretación mayor. El desarrollo de la habilidad de interpretar, si bien está presente en los otros procesos, se enfatiza en este, puesto que de manera integral se evalúa y valida todo lo realizado a la luz del contexto del problema, lo cual adquiere sentido en la redacción misma de la respuesta.

Este último aspecto debe ser destacado por el valor pedagógico que tiene. Muchas veces, los docentes plantean problemas cuyo procedimiento arroja un resultado que coincide con la respuesta del problema. Debido a que esto le sucede varias veces al estudiante, llega a adoptarlo como un patrón, lo cual convierte en un obstáculo cuando el estudiante tiene que resolver problemas en los que el resultado del procedimiento no coincide con la respuesta del problema original.

**Figura 1.1.3.2. Actividades cognitivas y resultado obtenido en el proceso *Interpretar***



A continuación, se presentan ejemplos de preguntas de la evaluación PISA en los que se ha priorizado el proceso *Interpretar*.

**Figura 1.1.3.3. Ejemplo de pregunta PISA para el proceso *Interpretar***

## REPRODUCTORES DEFECTUOSOS

La compañía *Electrix* fabrica dos tipos de equipos electrónicos: reproductores de vídeo y reproductores de audio. Al final de la producción diaria, los reproductores son probados y aquellos defectuosos son separados y enviados a reparar.

El siguiente cuadro muestra la cantidad promedio de reproductores de cada tipo que son fabricados por día, y el porcentaje promedio de reproductores defectuosos por día.

Tipo de reproductor	Cantidad promedio de reproductores fabricados por día	Porcentaje promedio de reproductores defectuosos por día
Reproductores de vídeo	2000	5%
Reproductores de audio	6000	3%

### Pregunta

PM00EQ02 – 0 1 9

Una de las personas que realiza las pruebas hace la siguiente afirmación: “En promedio, hay más reproductores de vídeo enviados a reparar por día comparado con el número de reproductores de audio enviados a reparar por día.”

Indica si la afirmación de la persona que hace las pruebas es correcta o no. Da un sustento matemático para respaldar tu respuesta.

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

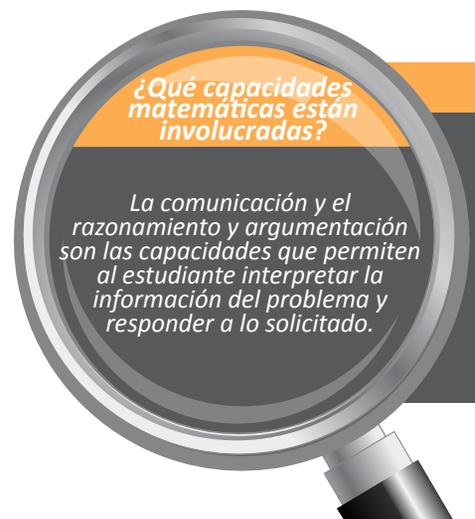
**Indicador:** Interpreta información estadística que involucra incertidumbre.

**Contenido:** Incertidumbre y datos

**Proceso:** Interpretar

**Contexto:** Ocupacional

**Respuesta:** *correcta* Respuestas que explican por qué la afirmación de la persona que hace las pruebas no es correcta.

La pregunta presentada pide verificar la veracidad de una afirmación realizada con los datos de un problema basado en la realidad. El proceso fundamental en esta pregunta es *interpretar* lo que se afirma y verificar si es cierta o no. Se puede desarrollar como se observa en la figura 1.1.3.4.

Figura 1.1.3.4. Posible resolución de la pregunta con énfasis en *Interpretar*

**Problema: Afirmación sobre reproductores defectuosos**

### Actividades cognitivas realizadas en la mente del estudiante

**Dar significado a la afirmación de la persona que realiza la prueba**

**Resultado:**

- Diferenciar la relatividad de los porcentajes respecto a su total.  
"Con seguridad 5% es mayor a 3% si se refieren al mismo total. En otros casos se debe comprobar numéricamente".
- Verificar si la afirmación de la persona que realizaba la prueba concuerda con los datos del problema y justificar la respuesta.

### Resultado obtenido

- 5% de 2000 es 100 (reproductores de video enviados a reparar).
- 3% de 6000 es 180 (reproductores de audio enviados a reparar).

Por lo tanto la afirmación es incorrecta porque 5% de 2000 es menor que 3% de 6000 y contradice lo expresado por la persona que realizaba las pruebas.

## 1.2. Categoría: Contenidos

Los contenidos matemáticos se organizan tomando como referencia los fenómenos matemáticos, subyacentes a grandes clases de problemas que han motivado el desarrollo de conceptos y procedimientos matemáticos.

Las preguntas PISA plantean situaciones cuya solución demanda el manejo de algunos conocimientos matemáticos. Este contenido matemático PISA está clasificado en cuatro subcategorías: **Cantidad, Cambio y relaciones, Espacio y forma, e Incertidumbre y datos.**

Es necesario señalar que las situaciones propuestas por PISA pueden involucrar a más de una de las subcategorías. Sin embargo, se clasificará en una de ellas dada la intención de la situación.

En PISA se evalúan aprendizajes adquiridos a lo largo de los quince años de trayectoria educativa de los estudiantes. No se trata de una evaluación de competencias curriculares, sin embargo, los contenidos matemáticos considerados en las pruebas forman parte de los contenidos propuestos en distintos grados de nuestro diseño curricular y en los textos escolares que se utilizan en las aulas de secundaria (ver anexo 1).

A continuación, se presentan las descripciones de cada subcategoría de contenido; se detallan las características más específicas que se consideraron para incluirlos en la evaluación de la competencia matemática de los jóvenes de 15 años.

### 1.2.1. Subcategoría: Cantidad

Comprende las situaciones que se refieren a expresar las características de los objetos mediante números. Esto implica entender las mediciones, el conteo y las unidades. Abarca, también, el razonamiento cuantitativo basado en el número en sus múltiples representaciones, y las operaciones numéricas realizadas mediante el cálculo, el cálculo mental o la estimación.

Los contenidos asociados a “Cantidad” se consideran en el Diseño Curricular Nacional peruano (DCN), en Número, relaciones y funciones. En los Mapas de progreso se relacionan con el Mapa de Cantidad.

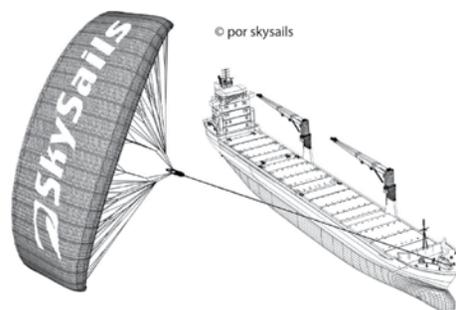
La Figura 1.2.1.1 muestra un ejemplo de pregunta de PISA asociada a Cantidad.

#### Figura 1.2.1.1. Pregunta PISA de la subcategoría Cantidad

### BARCOS A VELA

Noventa y cinco por ciento del comercio mundial se mueve por mar, por casi 50 000 barcos cisterna, barcos de carga y barcos contenedores. La mayoría de estos barcos utiliza combustible diesel.

Los ingenieros están planeando usar la energía eólica (del viento) como apoyo para los barcos. Su propuesta es sujetar una vela cometa al barco y usar la potencia del viento para ayudar a reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible en el medio ambiente.



### Pregunta

PM923Q01

Una ventaja de utilizar una vela cometa es que esta vuela a una altura de 150 m. Allí, la velocidad del viento es 25% mayor que en la cubierta del barco. Aproximadamente, ¿a qué velocidad sopla el viento a una vela cometa cuando en la cubierta de un barco contenedor la velocidad del viento es de 24 km/h?

- A. 6 km/h
- B. 18 km/h
- C. 25 km/h
- D. 30 km/h
- E. 49 km/h

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Aplica el cálculo del porcentaje en una situación del mundo real.

**Contenido:** Cantidad

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Científico

**Respuesta:** correcta D. 30 km/h



### ¿Qué conocimientos matemáticos involucra?

- Cálculo directo de porcentaje
- Estimación de porcentajes usuales (25%)
- Relación entre fracciones y porcentajes

Esta tarea consiste en calcular la medida de la velocidad a una altura de 150 m sobre la cubierta del buque. Para esto, se da como información que la velocidad del viento sobre la cubierta es de 24 km/h, y que esta se incrementa en un 25% a esa altura. En conclusión, para encontrar el valor pedido, es necesario calcular el incremento en un 25% de 24. Esto es  $24 \times 25\%$ , que es 6;  $24 + 6 = 30$  km/h.

Algunos estudiantes resuelven esta pregunta siguiendo un procedimiento directo y bien pensado, mientras que otros estudiantes, posiblemente, recurran a procesos más intuitivos que denotan menor manejo del contenido matemático.

### 1.2.2. Subcategoría: Cambio y relaciones

Comprende situaciones vinculadas a las relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, en las que los cambios se producen en los sistemas de objetos interrelacionados o en circunstancias en las que los elementos se influyen mutuamente. En muchos casos, estos cambios ocurren a lo largo del tiempo, y en otros, los cambios en un objeto o cantidad guardan relación con los cambios en otro objeto o cantidad. Algunas de estas situaciones suponen un cambio discontinuo; otras un cambio continuo. Algunas relaciones son de naturaleza permanente o invariable.

Los temas vinculados a esta subcategoría se manifiestan en situaciones como el crecimiento de organismos, ciclo de las estaciones, patrones del clima y condiciones económicas, entre otras. Además, requieren de contenidos matemáticos, como las funciones, las expresiones algebraicas, las ecuaciones, inecuaciones, tablas y representaciones gráficas para ser modelados.

Los contenidos asociados a “Cambio y relaciones” se consideran en el DCN, en Número, relaciones y funciones, mientras que en los Mapas de progreso se relacionan con las expectativas de aprendizaje del Mapa de Regularidad, equivalencia y cambio.

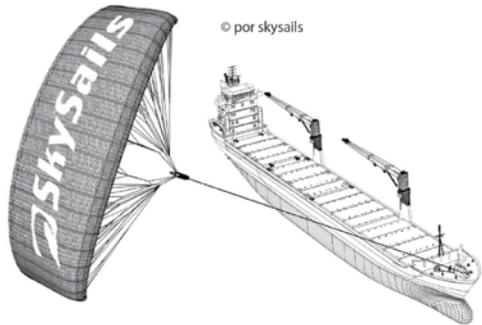
A continuación, se presenta una pregunta de PISA asociada a Cambio y relaciones.

**Figura 1.2.2.1. Pregunta PISA de la subcategoría Cambio y relaciones**

**BARCOS A VELA**

Noventa y cinco por ciento del comercio mundial se mueve por mar, por casi 50 000 barcos cisterna, barcos de carga y barcos contenedores. La mayoría de estos barcos utiliza combustible diesel.

Los ingenieros están planeando usar la energía eólica (del viento) como apoyo para los barcos. Su propuesta es sujetar una vela cometa al barco y usar la potencia del viento para ayudar a reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible en el medio ambiente.

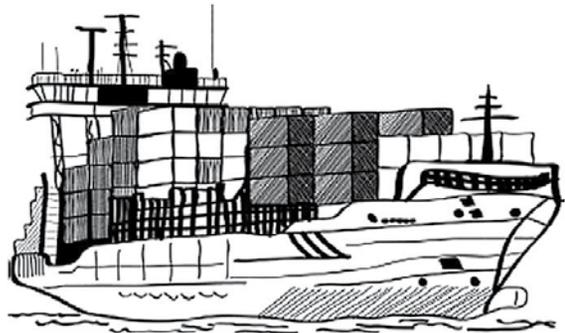


**Pregunta**

PM923Q04

Debido al elevado precio del litro del combustible diesel (0,42 zeds), los propietarios del barco **Nueva ola** están pensando en equipar su barco con una vela cometa. Se estima que una vela cometa puede reducir el consumo de combustible diesel en aproximadamente 20% en total.

- Nombre: Nueva ola
- Tipo: Barco de carga
- Longitud: 117 metros
- Ancho: 18 metros
- Capacidad de carga: 12 000 tons
- Velocidad máxima: 19 nudos
- Consumo de diesel por año sin usar una vela cometa: aproximadamente, 3 500 000 litros



El costo de equipar el Nueva ola con una vela cometa es 2 500 000 zeds.

¿Después de aproximadamente cuántos años lo que se ahorra en el consumo de combustible diesel cubriría el costo de la vela cometa? Muestra tus cálculos para sustentar tu respuesta.

Número de años: .....

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Resuelve problemas de situaciones de la vida real que involucren ahorro de costos y consumo de combustible.

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Científico

**Respuesta correcta:** El costo de la vela-cometa será cubierto en 8,5 años.



### ¿Qué conocimientos matemáticos involucra?

- Multiplicación
- Porcentaje
- Expresiones algebraicas
- Ecuaciones lineales con una incógnita
- Función lineal
- Representación tabular y gráfica de una función
- Proporcionalidad directa

El estudiante puede resolver esta pregunta modelándola mediante la función lineal forma:  $c(x) = 2\,500\,000 - 20\% (3\,500\,000) (0,42) x$ , o una equivalente en la que  $c(x)$  corresponde al costo no recuperado luego de haber utilizado la vela cometa durante un tiempo  $x$  en años. La respuesta se obtiene al calcular el valor de  $x$  para el que  $c(x) = 0$ . Lo puede hacer tabulando de la siguiente manera:

X (años)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c(x)	2 206 000	1 912 000	1 618 000	1 324 000	1 030 000	736 000	442 000	148 000	-146 000

Se observa que el valor de  $c(x)$  pasa por el 0 (cero) entre el 8 y 9; se acepta como respuesta 8 o 9 años.

El estudiante también puede resolver esta pregunta calculando el ahorro por año:  
 $20\% (3\,500\,000) (0,42) = 0,2 (3\,500\,000) (0,42) = 294\,000$

La cantidad de años se calcula dividiendo el costo de instalación de la vela cometa: 2 500 000 entre el ahorro anual; es decir,  $2\,500\,000 \div 294\,000 = 8,503401$  años. De este modo, se concluye que el ahorro se logrará en un periodo de 8 a 9 años.

### 1.2.3. Subcategoría: Espacio y forma

Comprende aquellos temas vinculados con la forma de los objetos del entorno, sus propiedades y características. Abarca patrones, propiedades de objetos, posiciones y orientaciones, representaciones de objetos, codificación y decodificación de información visual.

Para PISA, la competencia matemática en esta subcategoría incluye una serie de actividades, tales como la comprensión de la perspectiva (por ejemplo en los cuadros), la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.

Los contenidos asociados a “Espacio y forma” se consideran en el DCN en Geometría y medición. En los Mapas de progreso se relacionan con las expectativas de aprendizaje del Mapa de Geometría.

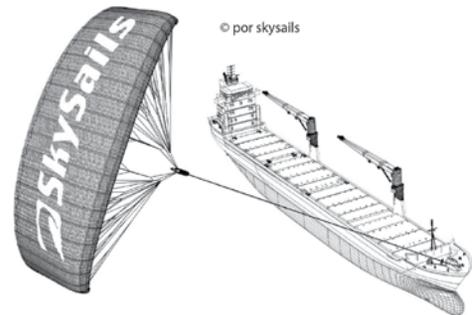
A continuación, se presenta una pregunta de PISA asociada a Espacio y forma.

### Figura 1.2.3.1. Pregunta PISA de la subcategoría Espacio y forma

#### BARCOS A VELA

Noventa y cinco por ciento del comercio mundial se mueve por mar, por casi 50 000 barcos cisterna, barcos de carga y barcos contenedores. La mayoría de estos barcos utiliza combustible diesel.

Los ingenieros están planeando usar la energía eólica (del viento) como apoyo para los barcos. Su propuesta es sujetar una vela cometa al barco y usar la potencia del viento para ayudar a reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible en el medio ambiente.

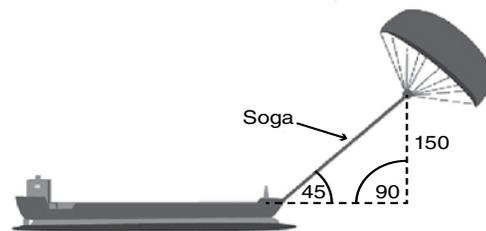


#### Pregunta

PM923Q03

Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de la soga de una vela cometa para que, al jalar el barco en un ángulo de  $45^\circ$ , esté a una altura vertical de 150 m, como se muestra en el diagrama de la derecha?

- A. 173 m
- B. 212 m
- C. 285 m
- D. 300 m



Nota: El dibujo no está a escala

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Usa el teorema de Pitágoras en un contexto geométrico real

**Contenido:** Espacio y forma

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Científico

**Respuesta:** correcta B 212 m



#### ¿Qué conocimientos matemáticos involucra?

- Multiplicación
- Radicación
- Ángulos y triángulos
- Triángulos rectángulos
- Teorema de Pitágoras
- Triángulos rectángulos notables

Para resolver esta pregunta, el estudiante modela la situación mediante un triángulo, para lo cual debe reconocer que se trata de un triángulo rectángulo, en el que uno de sus ángulos agudo mide  $45^\circ$ . Mediante una propiedad de los triángulos, deducirá que el otro ángulo

agudo también medirá  $45^\circ$ . Luego, lo relacionará con el modelo de triángulo rectángulo de estas medidas angulares, caracterizado por tener los catetos de la misma medida; identificará que uno de los catetos (el correspondiente a la altura) mide 150 m, por lo que concluirá que el otro cateto también mide 150 m. Una vez que conozca las medidas de los dos catetos del triángulo rectángulo, procederá a calcular la medida de la hipotenusa a través del teorema de Pitágoras o una relación de semejanza entre el triángulo rectángulo de lados  $L$ ,  $L$  y  $L\sqrt{2}$  y el modelo de la pregunta planteada. En ambos casos, llegará a concluir que la hipotenusa mide  $150\sqrt{2}$  m. Finalmente, interpretará el resultado obtenido y podrá dar como respuesta que la soga mide  $150\sqrt{2}$  m, que es aproximadamente 212,13 m, por lo que debe marcar B. 212 m.

#### **1.2.4. Subcategoría: Incertidumbre y datos**

Involucra los temas relacionados a la organización de la información mediante tablas y gráficos, así como las relaciones de probabilidad de eventos aleatorios. El contenido de esta subcategoría incluye la interpretación del significado de la cuantificación de la variación, el reconocimiento de la incertidumbre y el error en las mediciones, registro y representación de datos; y los conocimientos sobre el azar. Las actividades y conceptos específicos de este contenido son la recolección de datos, el procesamiento y análisis de los mismos, su presentación, la probabilidad de ocurrencia de los fenómenos y la inferencia.

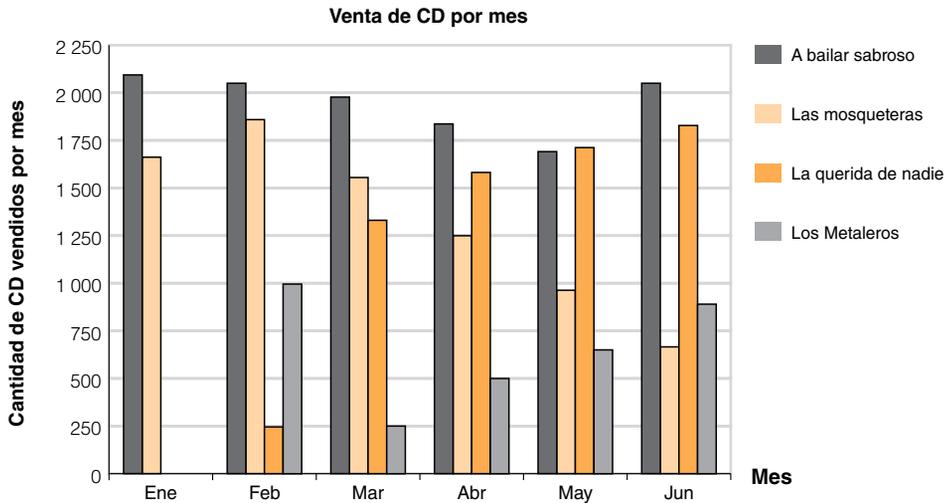
Los contenidos asociados a “Incertidumbre y datos” se consideran en el DCN en Estadística y probabilidad, mientras que en los Mapas de progreso se relacionan con las expectativas de aprendizaje del Mapa de Gestión de datos e incertidumbre.

En la Figura 1.2.4.1, se muestra una pregunta de PISA asociada a Incertidumbre y datos.

**Figura 1.2.4.1. Pregunta PISA de la subcategoría Incertidumbre y datos**

**LISTA DE ÉXITOS**

En enero, los nuevos CD de las bandas *A bailar sabroso* y *Las mosqueteras* salieron a la venta. En febrero, los CD de los grupos *La querida de nadie* y *Los Metaleros* los siguieron. En el siguiente gráfico, se observan las ventas de los CD de las bandas de enero a junio.



**Pregunta**

PM918Q05

El representante de la banda *Las mosqueteras* está preocupado porque la cantidad de CD vendidos bajó de febrero a junio. ¿Cuál es el estimado del volumen de ventas para julio si se mantiene la misma tendencia negativa?

- A. 70 CD
- B. 370 CD
- C. 670 CD
- D. 1 340 CD

**Esta pregunta, ¿qué evalúa?**

**Indicador:** Identifica un patrón numérico y lo generaliza para realizar una predicción.  
**Contenido:** Incertidumbre y datos  
**Proceso:** Emplear  
**Contexto:** Social  
**Medida:** 428  
**Dificultad:** Nivel 2  
**Respuesta:** correcta B. 370 CD

**¿Qué conocimientos matemáticos involucra?**

- Gráfico de barras simple y compuesto
- Estimación
- Progresión aritmética

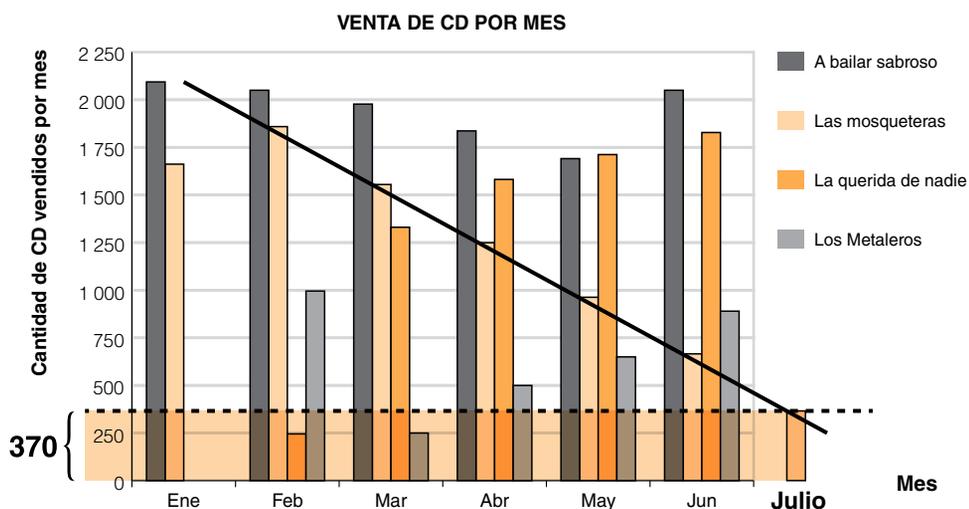
En esta pregunta, vemos que la información se presenta en un diagrama de barras compuesto. La tarea consiste en extraer información sobre la cantidad de CD vendidos de una de las bandas de música, descubrir alguna regularidad en el decrecimiento de esas cantidades y adelantar una proyección de cantidad de CD de dicha banda que se venderían en el siguiente mes.

La banda *Las Mosqueteras* vendió aproximadamente:

- En febrero: 1850 CD
- En marzo: 1550 CD; 300 menos que en el mes anterior.
- En abril: 1250 CD; 300 menos que en el mes anterior.
- En mayo: 950 CD; 300 menos que en el mes anterior
- En junio: 650 CD; 300 menos que en el mes anterior.
- En julio: puede vender  $650 - 300 = 350$

Si seguimos la secuencia, diríamos que se venderían aproximadamente 350 CD, por lo que la respuesta sería la alternativa B) 370 CD, por ser la más cercana a la cantidad aproximada calculada.

Otra opción es que el estudiante trace sobre el gráfico una recta proyectando las ventas futuras, y estime la altura que podría tener la siguiente barra, como se puede observar en la siguiente imagen:



### 1.3. Categoría: Contextos

Los **contextos** refieren a la variedad de situaciones en las que se presenta el problema a resolver. Para PISA, la situación más cercana al estudiante es su vida personal, seguida de la vida escolar, laboral y el ámbito del ocio. La comunidad local, la sociedad y, algo más alejadas, las situaciones científicas son otros contextos en los que surge la necesidad de utilizar la Matemática. Por tanto, se definen cuatro tipos de situaciones de la vida real y los contextos en los que se tienen que aplicar los conocimientos matemáticos.

#### 1.3.1. Contexto personal

Está relacionado con las actividades propias del estudiante, de su familia y de sus pares. Se podrían considerar como personales contextos tales como la preparación de alimentos, los viajes, los deporte, etc. El estudiante debe activar sus conocimientos matemáticos para interpretar los aspectos relevantes de situaciones cotidianas.

#### Figura 1.3.1.1. Pregunta PISA de contexto personal

##### SALSA

##### Pregunta

PM924Q02

Estás haciendo tu propio aderezo para una ensalada.  
Aquí está la receta para 100 mililitros (ml) del aderezo.

Aceite:	60 ml
Vinagre:	30 ml
Sillao:	10 ml

¿Cuántos mililitros (ml) de aceite necesitas para hacer 150 ml de este aderezo?

Respuesta: ..... ml

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Aplica la noción de ratio en situaciones de la vida diaria para calcular la cantidad que se requiere de un ingrediente en una receta.

**Contenido:** Cantidad

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Personal

**Respuesta:** *correcta* 90 ml es correcta.



*¿Qué elementos están presentes en este contexto?*

- *Receta de ensalada*
- *Aderezo*
- *Alimentos cotidianos*

En esta pregunta, se aprecia que el contexto corresponde al ámbito personal, porque la actividad referida está relacionada con situaciones propias de la vida cotidiana del estudiante, como es la preparación de una ensalada.

### 1.3.2. Contexto educacional

Está referido a situaciones que surgen en la escuela o el trabajo, y que exigen del estudiante identificar problemas que requieren una solución matemática. Se podrían considerar como educacionales contextos tales como cálculos de costos y ganancias, inventarios, toma de decisiones en el ámbito laboral, etc. Estos contextos deben tomar en cuenta situaciones de diverso tipo, desde la mano de obra de un trabajador no especializado hasta la de un trabajador profesional especializado. Cabe señalar que dichas situaciones deben ser accesibles para los estudiantes de 15 años.

**Figura 1.3.2.1. Pregunta PISA de contexto educacional**

#### VENDIENDO PERIÓDICOS

En Zedlandia, hay dos periódicos que quieren contratar vendedores. Los siguientes anuncios muestran cómo le pagan a sus vendedores.

**LA ESTRELLA DE ZEDLANDIA**

*¿NECESITAS DINERO EXTRA?*

*VENDE NUESTRO PERIÓDICO*

*Pagamos:*  
*0,20 zeds por periódico por los primeros 240*  
*periódicos que vendas en una semana, más 0,40*  
*zeds por cada periódico adicional vendido.*

**EL DIARIO DE ZEDLANDIA**

**¡TRABAJO BIEN PAGADO QUE TOMA POCO TIEMPO!**

Vende *El diario de Zedlandia* y gana 60 zeds a la semana, más 0,05 zeds adicionales por cada periódico vendido.

#### Pregunta

PM994Q01

En promedio, Francisco vende 350 periódicos de *La estrella de Zedlandia* cada semana. ¿Cuánto gana cada semana, en promedio?

Cantidad en zeds: .....

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Identifica información relevante para un modelo matemático simple para calcular un número.

**Dominio de contenido:** Cambio y relaciones

**Dominio de proceso:** Formular

**Dominio de contexto:** Educacional

**Respuesta correcta:** 90 ó 92



**¿Qué elementos están presentes en este contexto?**

- Medios de comunicación: periódico
- Actividad laboral remunerada
- Ganancia

### 1.3.3. Contexto social

Esta subcategoría está referida a situaciones en las se debe relacionar diversos elementos del entorno social para evaluar qué aspectos del mismo tienen consecuencias relevantes. Se podrían considerar como sociales aquellos contextos como las estadísticas en ámbitos comunitarios o nacionales, la demografía, la publicidad, etc.

**Figura 1.3.3.1. Pregunta PISA de contexto social**

#### TELEVISIÓN POR CABLE

La siguiente tabla muestra datos acerca de la cantidad de hogares que tienen televisión (TV) propia, en cinco países. Además, muestra el porcentaje de esos hogares que cuentan con TV propia y también están suscritos a la TV por cable.



País	Cantidad de hogares que cuentan con TV propia	Porcentaje de hogares que cuentan con TV propia con respecto al total de hogares	Porcentaje de hogares que están suscritos a la TV por cable con respecto a la cantidad de hogares que cuentan con TV propia
Japón	48,0 millones	99,8%	51,4%
Francia	24,5 millones	97,0%	15,4%
Bélgica	4,4 millones	99,0%	91,7%
Suiza	2,8 millones	85,8%	98,0%
Noruega	2,0 millones	97,2%	42,7%

Fuente: ITU, Indicadores de Telecomunicaciones Mundiales 2004/2005  
ITU, Telecomunicación mundial/ICT Informe de desarrollo 2006

#### Pregunta

PM978Q01

La tabla muestra que en Suiza el 85,8% de todos los hogares cuenta con TV propia.

Según la información de la tabla, ¿cuál es el valor aproximado más cercano para la cantidad total de hogares en Suiza?

- A. 2,4 millones
- B. 2,9 millones
- C. 3,3 millones
- D. 3,8 millones

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Identifica información relevante para un modelo matemático simple para calcular un número.  
**Dominio de contenido:** Incertidumbre y datos  
**Dominio de proceso:** Interpretar  
**Dominio de contexto:** Social  
**Respuesta correcta:** C. 3,3 millones



#### ¿Qué elementos están presentes en este contexto?

- Medios de comunicación social: televisión
- Televisión por cable
- Países
- Población

Esta pregunta es de contexto social, porque involucra información centrada en una actividad que se realiza en diferentes hogares y que, en este caso, refiere al entorno internacional.

### 1.3.4. Contexto científico

Alude a contenidos que involucran la comprensión de procesos tecnológicos o la explicación de problemas relacionados con la ciencia. Esta subcategoría abarca también situaciones de Matemática abstracta, que pueden surgir en las clases y que requieren explicitar los elementos matemáticos del problema para situarlo en un contexto más amplio.

#### Figura 1.3.4.1. Pregunta PISA de contexto científico

### PINGÜINOS



El fotógrafo de animales Jean Baptiste realizó una expedición de un año y tomó varias fotos de pingüinos y sus crías. Él estaba particularmente interesado en el crecimiento de la población de diferentes colonias de pingüinos.

#### Pregunta

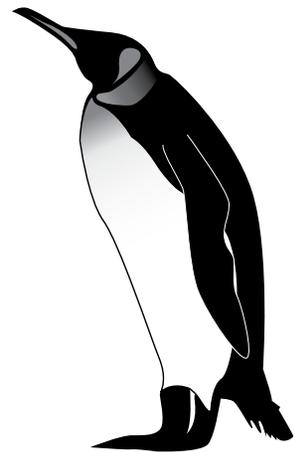
PM921Q01

Normalmente, una pareja de pingüinos pone dos huevos al año. Por lo general, la cría nacida del más grande de los dos huevos es la única que sobrevive.

En el caso de los pingüinos de penacho amarillo, el primer huevo pesa aproximadamente 78 g, y el segundo pesa aproximadamente 110 g.

Aproximadamente, ¿en qué porcentaje es más pesado el segundo huevo respecto del primer huevo?

- A. 29%
- B. 32%
- C. 41%
- D. 71%



## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Calcula el porcentaje en un contexto real.

**Dominio de contenido:** Cantidad

**Dominio de proceso:** Emplear

**Dominio de contexto:** Científico

**Respuesta correcta:** C. 41%



*¿Qué elementos están presentes en este contexto?*

- Fotografía
- Expedición científica
- Población de pingüinos
- Características de las crías de los pingüinos

Esta pregunta nos remite al contexto científico, porque está referida a la aplicación de la matemática en el mundo natural, e incluye temas relacionados con la ciencia.



# Resultados de Perú en PISA 2012

CAPÍTULO

**2**



# CAPITULO 2

## 2. Resultados de Perú en PISA 2012

En PISA, los resultados se presentan de dos maneras:

- por medida promedio de los estudiantes y,
- mediante niveles de desempeño

Según las respuestas de los estudiantes, se les asigna un puntaje o medida que corresponde con su habilidad. A mayor puntaje, mayor habilidad. Luego, de acuerdo a su medida, se clasifica a los estudiantes en un nivel de desempeño.

Los niveles de desempeño son una descripción del grado de competencia matemática alcanzado por los estudiantes. Cada nivel está asociado a determinadas medidas en la escala de PISA. Las habilidades correspondientes a cada uno de estos niveles se pueden entender como la descripción de los procesos y contenidos matemáticos necesarios para que un estudiante alcance ese nivel.

Los niveles establecidos por PISA son seis. Dichos niveles son inclusivos. Es decir, lograr ubicarse en el Nivel 6 implica haber alcanzado el Nivel 5 y los niveles anteriores. Por ello, el Nivel 6 agrupa a los estudiantes con mayor habilidad, mientras que los niveles inferiores agrupan a los estudiantes con menor habilidad. Esta forma de presentar los resultados permite conocer el porcentaje de estudiantes peruanos que ha logrado alcanzar cada nivel de desempeño.

### 2.1. Resultados de Perú en Matemática

A continuación, presentamos la descripción general de los niveles de la competencia matemática.

Tabla 2.1.1. Niveles de desempeño en la competencia matemática

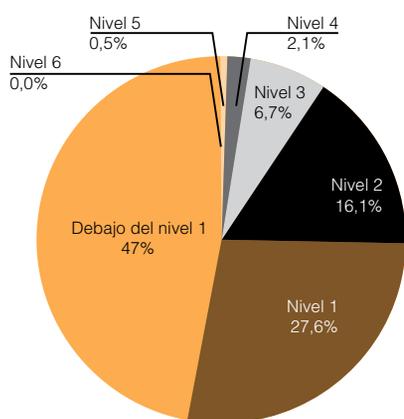
Nivel y medida en la escala)	¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?
<b>6</b> (de 669 a más)	<p>En el nivel 6, los estudiantes pueden conceptualizar, generalizar y utilizar la información sobre la base de sus investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Asimismo, pueden relacionar diferentes fuentes de información y tipos de representaciones, y pasar de una a otra con flexibilidad. Los estudiantes de este nivel son capaces de pensar y razonar con Matemática avanzada. Pueden aplicar su conocimiento, comprensión e intuición, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, para desarrollar nuevos planteamientos y estrategias frente a situaciones nuevas. Del mismo modo, pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones referidas a sus resultados, interpretaciones y argumentos, y su pertinencia a situaciones originales.</p>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	<p>En el nivel 5, los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos de situaciones complejas, a partir de lo cual identifican las condiciones y especifican los supuestos. De igual manera, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas para abordar problemas complejos relacionados con estos modelos. En este nivel, los estudiantes trabajan estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones referidas a estas situaciones. Ellos reflexionan sobre sus acciones y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.</p>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	<p>En el nivel 4, los estudiantes pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas, que pueden implicar condiciones o exigir la formulación de supuestos. También, pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real. Además, en este nivel, los estudiantes utilizan habilidades bien desarrolladas y pueden razonar con flexibilidad y con algunas intuiciones en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, razonamientos y acciones.</p>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	<p>En el nivel 3, los estudiantes pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son suficientemente sólidas como base para la construcción de un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. Asimismo, en este nivel, pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son, también, capaces de elaborar breves escritos, en los que exponen sus interpretaciones, resultados y razonamientos.</p>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	<p>En el nivel 2, los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. De igual modo, pueden extraer información relevante a partir de una única fuente y hacer uso de un único modo de representación. A su vez, utilizan algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas. También, son capaces de realizar razonamientos directos e interpretaciones literales de sus resultados.</p>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	<p>En el nivel 1, los estudiantes pueden responder a las preguntas que involucran contextos conocidos, en los que se encuentra toda la información necesaria y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Realizan acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.</p>
<b>Debajo del nivel 1</b> (menos de 358)	<p>Los estudiantes que no alcanzan el nivel 1 de desempeño pueden, en el mejor de los casos, ser capaces de realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas. Estas pueden ser la lectura de un único valor a partir de un gráfico sencillo o tabla en la que las etiquetas de la misma coincide con las palabras en el estímulo y pregunta, de modo que los criterios de selección son claros y la relación entre la tabla y los aspectos del contexto descrito son evidentes. Asimismo, realizan operaciones aritméticas básicas, siguiendo instrucciones claras y bien definidas.</p>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 61.

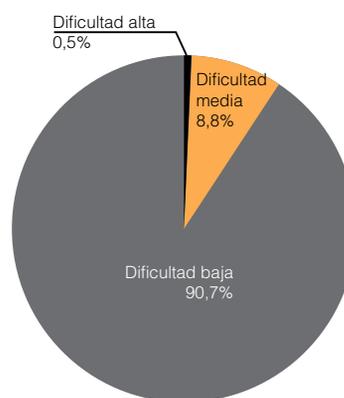
En este marco, los resultados obtenidos por Perú en la evaluación PISA 2012 se pueden observar en la Figura 2.1.1, los cuales se presentan como porcentaje de estudiantes en cada nivel de desempeño, luego de lo cual se han agrupado los niveles por dificultad: dificultad baja (nivel 1 y nivel 2), dificultad media (nivel 3 y nivel 4) y dificultad alta (nivel 5 y nivel 6).

**Figura 2.1.1. Distribución de los estudiantes peruanos de 15 años, según niveles de desempeño de Matemática**

**Distribución de los estudiantes peruanos de 15 años, según nivel de desempeño de Matemática**



**Distribución de los estudiantes peruanos de 15 años, según nivel de dificultad**



Adaptado de "Primeros resultados. Informe nacional del Perú. Serie evaluaciones y factores asociados", por Ministerio de Educación, 2013, p. 31.

Como se ve en la figura anterior, 90% de los estudiantes peruanos de 15 años de edad solamente resuelve preguntas de **dificultad baja**, es decir, se encuentran Debajo del nivel 1 (47%), en el Nivel 1 (27,6%) o en el Nivel 2 (16,1%). Estos estudiantes son capaces de realizar tareas matemáticas directas y sencillas, resolver problemas matemáticos con información completa en situaciones cotidianas mediante procedimientos básicos o resolver situaciones con una inferencia directa en la que describen literalmente sus resultados.

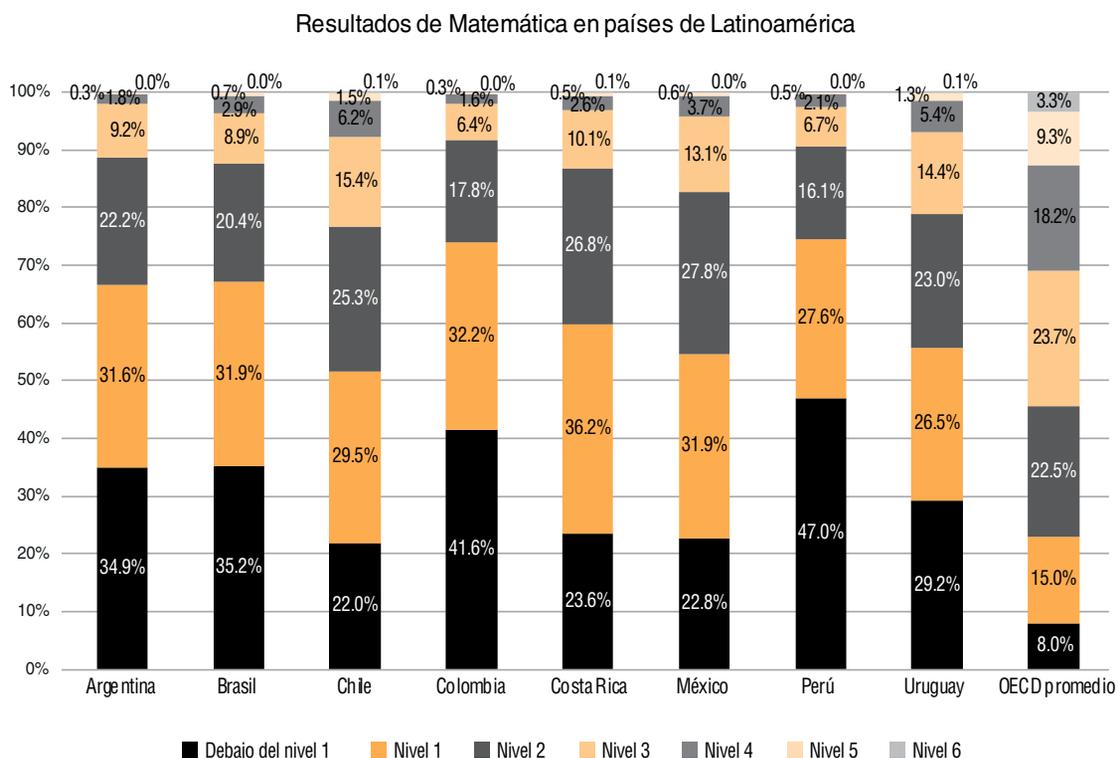
Aproximadamente, el 9% resuelven preguntas de **dificultad media**; es decir, se encuentran en el Nivel 3 (6,7%) o en el Nivel 4 (2%). Estos estudiantes son capaces de resolver problemas que requieren seleccionar e integrar información presentada de manera diversa, exponer sus resultados, realizar la inferencia de datos a partir de una o más fuentes, tomar decisiones sobre la secuencia a seguir en un procedimiento y realizar razonamientos directos.

Casi el 1% resuelven preguntas **de dificultad alta**: 1 de cada 200 estudiantes resuelven preguntas de Nivel 5; y prácticamente no hay estudiantes peruanos que resuelvan preguntas del Nivel 6. Para ubicarse en estos niveles, los estudiantes deberían razonar de forma flexible con Matemática avanzada, a través del empleo modelos explícitos en situaciones reales complejas que tienen condiciones específicas y en las que se integran diferentes representaciones. Además, deberían lograr comunicar sus explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, razonamientos y acciones.

En la Figura 2.1.2 se muestra los resultados de los países latinoamericanos que participaron

en PISA 2015, del promedio de los países de la OCDE. Como se puede apreciar, los resultados de todos los países de Latinoamérica están bastante por debajo del promedio OCDE.

**Figura 2.1.2. Resultados de Matemática en países de Latinoamérica**

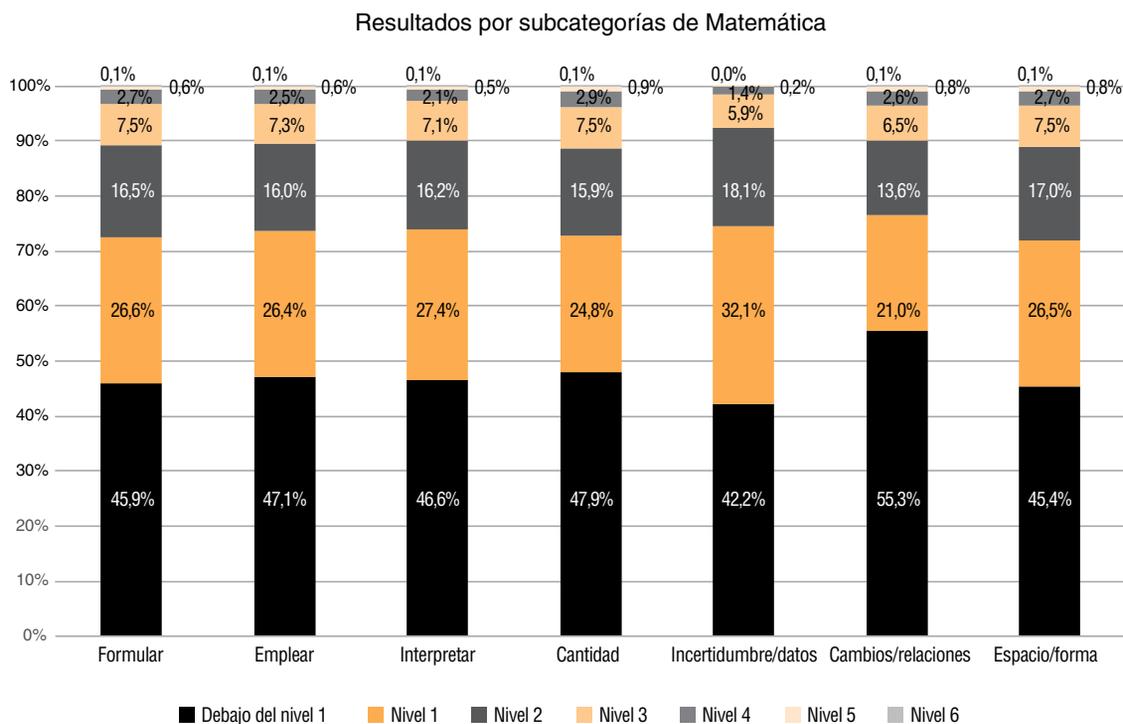


En Matemática, PISA señala que “el nivel 2 es el que se considera la línea de base o el punto de partida del dominio del área que es requerido para participar en la sociedad moderna” (OECD, 2013a, p. 68). En el caso peruano, solo el 25,4% de los estudiantes alcanza o supera o ese nivel. Esto quiere decir que  $\frac{3}{4}$  de la población de quince años no ha alcanzado siquiera ese punto de partida.

## 2.2. Resultados de Perú por subcategoría de matemática

La evaluación PISA 2012 se enfocó en Matemática, por ello, podemos presentar sus resultados por subcategorías de contenido y proceso matemático.

Figura 2.2.1. Resultados por subcategorías de Matemática



Como muestra la Figura 2.2.1., el desempeño de los estudiantes peruanos no muestra grandes diferencias entre las diferentes subcategorías. En todas ellas se observa un desempeño muy bajo, de tal manera que en cada caso, tres de cada cuatro estudiantes de cuenta de un desempeño en el primer nivel o debajo de este.

En el Anexo 6 se presenta la descripción de los niveles de desempeño en cada una de estas siete subcategorías.



Pautas y recursos para enriquecer la práctica pedagógica en base a la evaluación PISA

CAPÍTULO

**3**



# CAPITULO 3

## 3. Pautas y recursos para enriquecer la práctica pedagógica en base a la evaluación PISA

Este capítulo se subdivide en tres secciones. Todas ellas apuntan a nutrir el repertorio docente con propuestas de aprendizaje y pautas que permitan el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes desde el enfoque de la competencia matemática de la evaluación PISA.

La primera sección aborda el uso de preguntas de las evaluaciones PISA anteriores y que hoy son de dominio público. En dicha sección presentan el análisis de diversas preguntas, acompañando la pregunta misma con sugerencias e información complementaria que permitirá su uso efectivo dentro del salón de clase.

La segunda sección, es un ejemplo de situación de aprendizaje con atención a la diversidad. En ese sentido, ha sido diseñada para ser implementada considerando las diferencias individuales entre estudiantes no solo en aulas multigrado sino en todo entorno de aprendizaje que demande un acercamiento diferenciado de la enseñanza matemática, cuando los estudiantes no alcanzado los mismo niveles de desarrollo de la competencia matemática.

Finalmente, la tercera sección ofrece un conjunto de situaciones de aprendizaje dirigidas a estudiantes del nivel secundario.

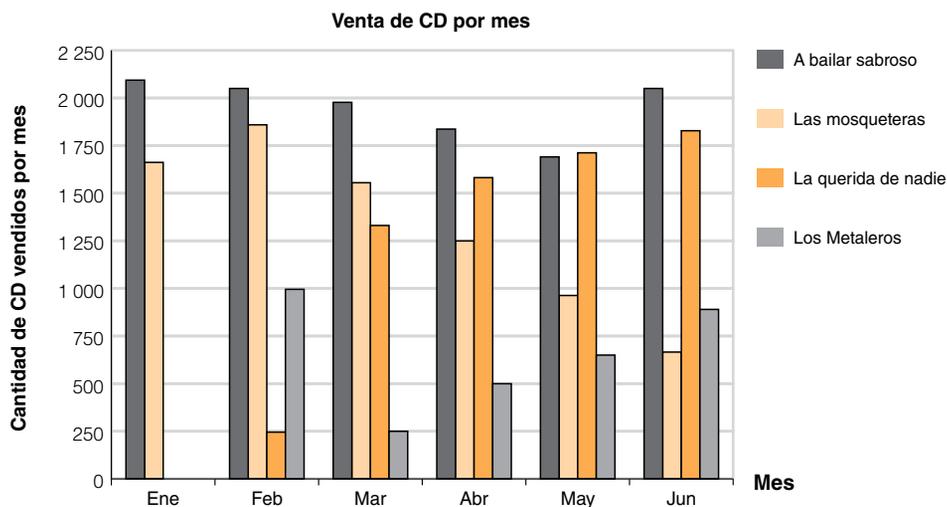
### 3.1. Uso de las preguntas de PISA en el aula de Matemática

Como ya se indicó, en esta sección, se presentan algunas preguntas de Matemática publicadas por PISA. En cada una de ellas se indica qué es lo que evalúa, el contenido principal, proceso matemático priorizado y el nivel al que pertenece.

Figura 3.1.1. Pregunta PISA del nivel Debajo del nivel 1

## LISTA DE ÉXITOS

En enero, los nuevos CD de las bandas *A bailar sabroso* y *Las mosqueteras* salieron a la venta. En febrero, los CD de los grupos *La querida de nadie* y *Los Metaleros* los siguieron. En el siguiente gráfico, se muestra las ventas de los CD de las bandas de enero a junio.



## Pregunta

PM918Q01

¿Cuántos CD vendió el grupo *Los Metaleros* en abril?

- A. 250
- B. 500
- C. 1 000
- D. 1 270

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Lee un gráfico de barras.

**Contenido:** Incertidumbre y datos

**Proceso:** Interpretar

**Contexto:** Social

**Medida:** 348

**Dificultad:** Nivel por debajo del nivel 1

**Respuesta correcta:** :: B. 500



- El 47% de los estudiantes peruanos solo logran resolver preguntas que se encuentran por debajo del Nivel 1 de PISA.

- “En estudios longitudinales en Australia, Canadá, Dinamarca y Suiza se muestra que los estudiantes con un desempeño menor al nivel 2, frecuentemente, presentan severas desventajas en su transición a la educación superior y a su incorporación en la fuerza laboral, en los años posteriores”.

(OECD, 2013a, p. 68)

Para resolver esta pregunta, el estudiante necesita obtener información del gráfico estadístico. Por esta razón, el proceso preponderante es el de *interpretar*. En su resolución, el estudiante puede llevar a cabo los siguientes pasos:

- Identificar las barras que corresponden al mes de abril.
- Seleccionar la barra que corresponde a *Los Metaleros*.
- Interpretar que la altura de la barra seleccionada indica la información requerida (cantidad de CD que se vendieron en abril).

En este caso, no se necesita la lectura de escalas ni la interpolación de información.

En cuanto al contexto de la pregunta, este corresponde al ámbito social, pues este tipo de información se puede encontrar en los medios de comunicación, en los recibos de agua, de luz, entre otros.

### ***¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?***

#### **Etapas de exploración de los estudiantes**

- Lea con los estudiantes el contexto inicial y genere un espacio para la observación del gráfico estadístico. Pida que describan lo que ven en este contexto y si no lo hacen voluntariamente pregunte si han visto información similar. En este caso, pida especificar dónde han visto información parecida, para qué se ha empleado, en qué se parece y diferencia del contexto de esta pregunta de PISA. De esta forma, los estudiantes se acostumbrarán a relacionar el contexto de la pregunta con experiencias anteriores, lo cual les facilitará la comprensión del problema. Asimismo, en esta etapa servirá para reconocer las habilidades que tienen los estudiantes para leer los gráficos de barras. Por ello, pregunte por el significado de los números que aparecen en el gráfico, los colores de las barras, el significado de que no haya barras en determinados casos (como en enero), entre otros.
- Genere espacios de debate en los que los estudiantes expresen, refuercen o contradigan ideas y se involucren en procesos de argumentación.
- La lectura del gráfico no se basa únicamente en datos precisos, sino también en la **estimación** de valores a partir de **aproximaciones** o **referencias**.
- Proponga preguntas para que los estudiantes estimen y puedan emplear esa estimación **para comparar** u **operar**. Pueden ser de utilidad preguntas como “¿En qué mes se vendieron más CD de....?”, ¿Aproximadamente cuántos CD se vendieron en los meses de...?”.

#### **Desarrollo**

- Proporcione tiempo para que cada estudiante responda la pregunta y, luego, pregunte cuántos eligieron cada alternativa. Después, pida a un estudiante que argumente cada alternativa de respuesta.
- Someta a la opinión de los estudiantes si la alternativa B es la correcta.

### **Estrategias de resolución**

- El estudiante comprende la situación, la información general con la que cuenta e identifica la actividad o tarea que se le solicita en la pregunta.
- Posteriormente, el estudiante focaliza su atención en encontrar la información pertinente que le permita responder la pregunta, centrándose en la información del mes de abril.
- Finalmente, en este mes, identifica lo pedido y busca el dato en el gráfico:  
Mes: abril                      Color: gris claro
- Esa barra llega a la segunda marca de la escala que corresponde a 500 CD.

### ***¿En qué momento puedo proponerla en clase?***

Esta pregunta podría trabajarla desde **primer grado de secundaria** para que sus estudiantes logren interpretar y organizar información en gráficos de barras. El DCN, en Estadística y probabilidad, proceso de Comunicación matemática, lo contempla en este grado.

Al trabajar estas preguntas, oriente a los estudiantes a registrar e interpretar datos en gráficos de barras (horizontales y verticales), con diversas escalas. En ellas, deben registrar o interpretar datos que coincidan con la escala, así como datos que se deban hallar por estimación o aproximación. Varíe la cantidad de barras por cada categoría y los contextos en que estas se presenten; use variables cualitativas o cuantitativas discretas.

### ***Articulación con los mapas de progreso***

#### **Gestión de datos e incertidumbre**

Describe utilizando lenguaje matemático su comprensión sobre las preguntas y posibles respuestas para una encuesta, la información contenida en tablas y gráficos.

V ciclo

Figura 3.1.2. Pregunta PISA del Nivel 1

## ¿QUÉ CARRO?

Cristina acaba de obtener su licencia de conducir y quiere comprar su primer carro. La siguiente tabla muestra los detalles de cuatro carros que encuentra en la tienda local de venta de carros usados.



Modelo:	Alfa	Bolte	Castel	Dezal
Año	2003	2000	2001	1999
Precio publicado (zeds)	4800	4450	4250	3990
Distancia recorrida (kilómetros)	105 000	115 000	128 000	109 000
Capacidad del motor (litros)	1,79	1,796	1,82	1,783

## Pregunta

PM985Q01

Cristina quiere un carro que cumpla con **todas** estas condiciones:

- La distancia recorrida **no** debe superar los 120 000 kilómetros.
- Debe haberse fabricado en el año 2000 o después.
- El precio publicado **no** debe superar los 4500 zeds.

¿Qué carro cumple con las condiciones de Cristina?

- A. Alfa
- B. Bolte
- C. Castel
- D. Dezal

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Selecciona un valor que cumple con las condiciones numéricas dadas, en un contexto financiero.

**Contenido:** Incertidumbre y datos

**Proceso:** Interpretar

**Contexto:** Personal

**Medida:** 328

**Dificultad:** Nivel Por debajo del nivel 1

**Respuesta correcta:** B. Bolte



- El **27,6%** de los estudiantes peruanos solo pueden resolver preguntas del nivel 1 en PISA.
- Estos estudiantes responden solamente a problemas matemáticos que simulan situaciones cotidianas, con enunciados que tienen toda la información necesaria y con preguntas están claramente delimitadas, a partir de lo cual logran identificar información y ejecutar procedimientos básicos y típicos a partir de instrucciones directas.
- Estos estudiantes tendrían desventajas en su transición a la educación superior y a su incorporación en la fuerza laboral, en los años posteriores.

Para resolver esta pregunta, el estudiante tiene que comprender el significado de cada una de las condiciones y confrontarlas con las que se encuentran en la tabla hasta encontrar el auto que cumpla con todas las condiciones. El proceso prioritario que permitirá resolver la pregunta es *interpretar*, pues los estudiantes deben dar significado a las expresiones comparativas “no debe superar” o “después de 2000”. En su resolución se requiere que el estudiante:

- Dé significado a las expresiones como “no debe superar...”, “después de 2000”.
- Seleccione el auto que cumple con todas las características.

El contexto de la pregunta es personal, pues los estudiantes, en distintos momentos de su vida, se han enfrentado o enfrentarán a tomar decisiones personales a partir de una serie de características.

### ***¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?***

#### **Etapas de exploración de los estudiantes**

- Permita que los estudiantes se familiaricen con el contexto de la pregunta y que encuentren situaciones parecidas que les permitan generar ideas para imaginar lo que se le podría preguntar y comprender mejor la situación en su conjunto.

#### **Desarrollo**

- Brinde tiempo para que los estudiantes lean la pregunta y la comprendan. Permita que, a mano alzada, se describa la situación presentada, y que los estudiantes planteen posibles alternativas de elección del auto y en función de qué criterios se puede elegir.
- Destaque que las opciones podrían ser similares para todos, pero no todos realizarán la misma elección.
- Forme tríos de estudiantes y ejércitelos en expresar una elección de diferentes formas: de manera directa, dando pistas para que descubran la elección empleando un solo criterio (información en una columna), dando pistas empleando dos o más criterios (columnas).
- Destaque que, para que se brinden pistas, se pueden emplear expresiones comparativas como las mencionadas inicialmente.

#### **Estrategias de resolución**

- El estudiante reconoce la información proporcionada en la tabla y, a través de las condiciones, comprende que debe elegir el auto interpretando esas condiciones.
- El estudiante interpreta cada una de las condiciones planteadas, y puede traducirlas a expresiones más sencillas. Así, por ejemplo se pueden encontrar expresiones equivalentes:
  - “La distancia no debe superar 120 000 kilómetros”.
  - “La distancia no debe ser mayor a 120 000 kilómetros”.
  - “La distancia debe ser menor o igual a 120 000 kilómetros”.
- En función de las interpretaciones que se realicen de cada una de las condiciones, el estudiante identifica y marca los datos de la tabla para identificar al auto que cumpla las tres condiciones buscadas. Este proceso se puede hacer asignando un signo o marca en cada condición:

- El kilometraje no debe superar los 120 000 kilómetros. Significa que el kilometraje debe ser menor que 120 000 kilómetros.
- Debe haberse fabricado en el año 2000 o uno posterior. Significa que se debe haber fabricado en el año 2000 o posteriormente. ●
- El precio promocionado no debe superar los 4 500 zeds. Significa que el precio debe ser menor que 4 500 zeds.
- Con los tríos de trabajo formados, presente la pregunta y proporcione tiempo para su solución
- Pida que se explique en grupo abierto parte por parte.
- Oriente al consenso y comprensión de la solución.

Modelo:	Alfa	Bolte	Castel	Dezal
Año	2003	2000	2001	1999
Precio publicado (zeds)	4800 ●	4450 ●	4250 ●	3990
Distancia recorrida (kilómetros)	105 000	115 000	128 000	109 000
Capacidad del motor (litros)	1,79	1,796	1,82	1,783

Sin embargo, también, es posible disminuir el número de marcas colocando solo las marcas adicionales a aquellos datos que ya tienen la mayor cantidad de marcas en ese momento, y descartando los datos que no cumplen la condición anterior. Observe:

Modelo:	Alfa	Bolte	Castel	Dezal
Año	2003	2000	2001	1999
Precio publicado (zeds)	4800	4450 ●	4250	3990
Distancia recorrida (kilómetros)	105 000	115 000	128 000	109 000
Capacidad del motor (litros)	1,79	1,796	1,82	1,783

Primero, se descartó el Castel y el Alpha; luego, el Dezal; finalmente, quedó el Bolte, al que le corresponde la opción B.

### ¿En qué momento puedo proponerla en clase?

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren organizar e interpretar la información mediante tablas. Según el DCN en Estadística, desde el quinto grado los estudiantes están en capacidad de responder a este tipo de tareas. Por ello esta es una pregunta aplicable desde el primer grado de secundaria.

### Articulación con los mapas de progreso

#### Gestión de datos e incertidumbre

Diseña y ejecuta un plan orientado a la investigación y resolución de problemas, usando estrategias heurísticas y procedimientos matemáticos para recopilar y organizar datos cuantitativos.

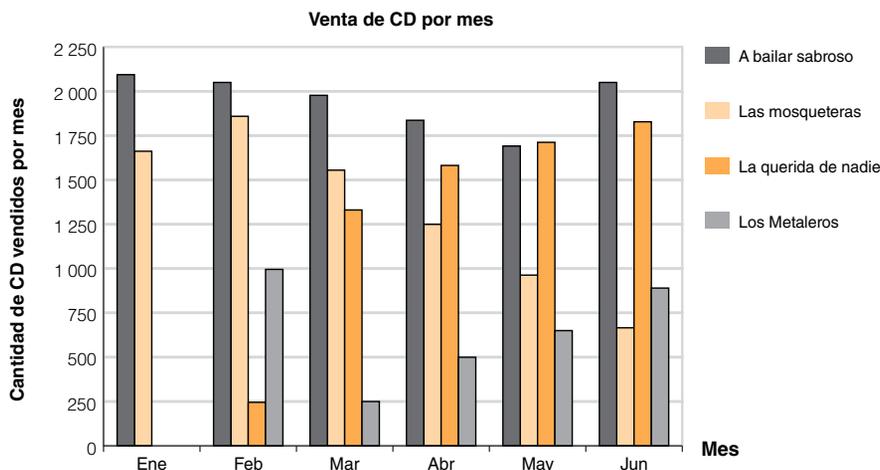
VI ciclo

**Figura 3.1.3. Pregunta PISA del Nivel 2**

**UNIDAD: LISTA DE ÉXITOS**

• Aun cuando el contexto de esta pregunta es el mismo que ilustra la subcategoría Interpretar (ver pág. 31) la pregunta es distinta.

En enero, los nuevos CD de las bandas *A bailar sabroso* y *Las mosqueteras* salieron a la venta. En febrero, los CD de los grupos *La querida de nadie* y *Los Metaleros* los siguieron. En el siguiente gráfico, se muestra las ventas de los CD de las bandas de enero a junio.



**Pregunta**

PM918Q05

El representante de la banda *Las mosqueteras* está preocupado, porque la cantidad de CD vendidos bajó de febrero a junio. ¿Cuál es el estimado del volumen de ventas para julio si se mantiene la misma tendencia negativa?

- A. 70 CD
- B. 370 CD
- C. 670 CD
- D. 1 340 CD

**Esta pregunta, ¿qué evalúa?**

**Indicador:** Identifica un patrón numérico y lo generaliza para realizar una predicción.  
**Contenido:** Incertidumbre y datos  
**Proceso:** Interpretar  
**Contexto:** Social  
**Medida:** 428  
**Dificultad:** Nivel 2  
**Respuesta correcta:** B. 370 CD

- Solo el 25,4% de los estudiantes peruanos logra resolver preguntas del Nivel 2 de PISA.
- Estos estudiantes interpretan y reconocen situaciones que requieren de una inferencia directa y son capaces de realizar razonamientos directos e interpretaciones literales de sus resultados. Extraen información relevante a partir de una única fuente y hacen uso de un único modo de representación. Asimismo, aplican algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicos.
- Este nivel es considerado base del desempeño matemático requerido para participar adecuadamente en la sociedad moderna. En los países con mejores resultados en PISA, más de 9 de cada 10 estudiantes alcanza este nivel (OECD, 2013a, p. 68).

La pregunta corresponde al contexto social, pues los estudiantes pueden encontrar este tipo de información en los medios de comunicación, en los recibos, entre otros y realizar predicciones a partir de ellas.

El proceso prioritario que permitirá resolver la pregunta es *interpretar*, pero también se requiere de estimar, generalizar y predecir, debido a que los estudiantes deben identificar datos no precisos, determinar o formar una secuencia, hallar el patrón de la misma y aplicarlo para un caso inmediato posterior.

### **¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?**

#### **Etapas de exploración de los estudiantes**

- Profundice en el nivel de observación solicitando que los estudiantes realicen comparaciones o generalizaciones. Puede partir de preguntas como: “¿Hay algún grupo que siempre aumente sus ventas?”, “¿Cuál?”, “¿Cómo podemos saberlo?”.
- Puede introducir vocabulario nuevo, empleando las palabras *tendencias*, *crecimiento*, *decrecimiento*, etc.
- Puede solicitar, también, que los estudiantes planteen preguntas que puedan ser respondidas con los datos del gráfico. Estas pueden incrementar su grado de dificultad paulatinamente, desde aquellas literales con respuesta en un dato numérico o con el nombre de un grupo, hasta aquellas que involucran realizar deducciones.

#### **Desarrollo**

- Forme parejas o tríos de trabajo para responder la pregunta y solicite que los integrantes estén preparados para explicar la respuesta de forma parcial o completa.
- Proporcione un tiempo para que cada grupo responda la pregunta.
- Luego, en salón completo, pregunte cuántos eligieron cada alternativa. Posteriormente, si hubiera diferencias, pida que argumenten cada alternativa hasta llegar al consenso.
- Saque conclusiones sobre el proceso seguido; enfatice el procedimiento y no solo el resultado.

#### **Estrategias de resolución**

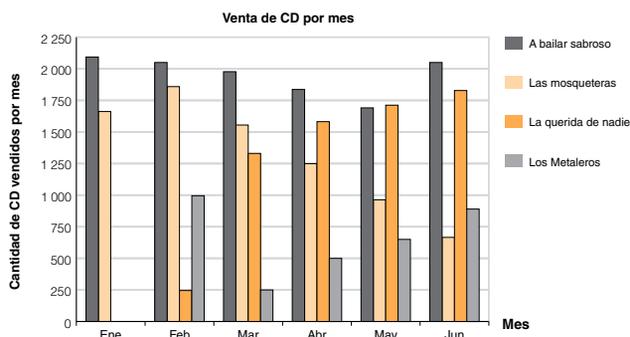
El proceso para resolver esta pregunta tiene varias etapas que podemos describir del siguiente modo:

- El estudiante comprende la situación de preocupación por la disminución de ventas de CD de un grupo determinado. Reconoce la información general con la que cuenta y de dónde debe extraer la información que busca. Asimismo, identifica la actividad o tarea que se le solicita en la pregunta, a partir de lo cual comprende la expresión “tendencia negativa”. De igual modo, reconoce que, en este caso, se le pregunta sobre una información que no está en el gráfico y que corresponde al mes siguiente.
- El estudiante centra su atención en la información que le permitirá responder la pregunta, observando las columnas de color gris oscuro en los meses de febrero, marzo, abril, mayo y junio. En estos meses, busca la información numérica precisa o estimada, y confirma la “tendencia negativa” a la que se refería el problema. Tiene que observar

con precisión la escala (que varía de 250 en 250), y realizar estimaciones de la mitad y la cuarta parte, empleando, incluso, frases comparativas.

Usar estimaciones es algo a lo que el estudiante peruano, en general, no está acostumbrado; por ello, resultará novedoso. Los datos numéricos que no son precisos y que podrían variar de grupo en grupo (manteniendo cercanía) son los siguientes:

- Febrero: 1 875 (estimando la mitad de la escala)
- Marzo: menos de 1625 (estimando por proximidad a la mitad de la escala)
- Abril: 1250 (lectura exacta)
- Mayo: menos de 1 000 (estimando por cercanía a la escala)
- Junio: menos de 750 o más de 625 (estimando por cercanía con la mitad de la escala).



- Con estos datos, el estudiante busca deducir un patrón que no es exacto, y puede decir que, aproximadamente, cada mes disminuyen 250.
- Posteriormente, proyecta el patrón a julio, restando 250 o más a la estimación realizada en junio; ello corresponde a menos de 500 o más de 475.
- Finalmente, evalúa las alternativas en función de su respuesta: puesto que en junio hay menos de 750, en julio debe haber menos de 500, lo que correspondería a la alternativa B o la A. Sin embargo, como la A es muy lejana y no cumpliría con la regularidad planteada, la respuesta es la B.
- Otros estudiantes más familiarizados con las estimaciones podrían evaluar las alternativas de respuesta y señalar que, como la de junio es menos de 750, la respuesta debe ser menor a esta opción, pero cercana a menos de 500 o más de 475. Al observar las alternativas, solo resultaría viable la B.

- A. 70
- B. 370**
- C. 670
- D. 1340

**¿En qué momento puedo proponerla en clase?**

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren organizar la información mediante gráficos de barras, según el Número, relaciones y funciones, al identificar patrones numéricos, generalizarlos y simbolizarlos. Por ello esta es una pregunta aplicable desde el primer grado de secundaria.

## ***Articulación con los mapas de progreso***

### **Regularidad, equivalencia y cambio**

Interpreta datos y relaciones no explícitas en situaciones de regularidad y cambio entre dos magnitudes y los expresa con modelos referidos a patrones geométricos, patrones crecientes y decrecientes.

VI ciclo

### **Gestión de datos e incertidumbre**

Formula y justifica conjeturas referidas a relaciones entre los datos o variables contenidos en fuentes de información observadas en situaciones experimentales; e identifica diferencias y errores en una argumentación.

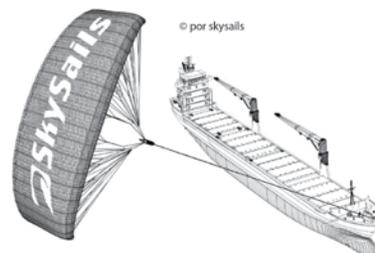
VI ciclo

### Figura 3.1.4. Pregunta PISA del Nivel 3

#### BARCOS A VELA

Noventa y cinco por ciento del comercio mundial se mueve por mar, por casi 50 000 barcos cisterna, barcos de carga y barcos contenedores. La mayoría de estos barcos utiliza combustible diesel.

Los ingenieros están planeando usar la energía eólica (del viento) como apoyo para los barcos. Su propuesta es sujetar una vela cometa al barco y usar la potencia del viento para ayudar a reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible en el medio ambiente.

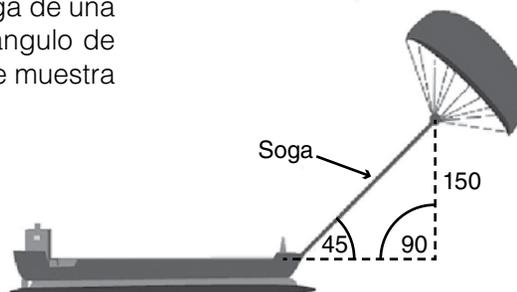


#### Pregunta

PM923Q03

Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de la soga de una vela cometa para que, al jalar el barco en un ángulo de  $45^\circ$ , esté a una altura vertical de 150 m, como se muestra en el diagrama de la derecha?

- A. 173 m
- B. 212 m
- C. 285 m
- D. 300 m



Nota: El dibujo no está a escala

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Interpreta información estadística que involucra incertidumbre.

**Contenido:** Espacio y forma

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Científico

**Respuesta correcta:** B 212



- Solo el 9,3% de los estudiantes peruanos logran resolver preguntas que pertenecen al Nivel 3 de PISA.
- Estos estudiantes ejecutan procedimientos claramente descritos, incluyendo decisiones secuenciales. Sus interpretaciones sirven para la construcción de un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. También, interpretan y utilizan representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonan directamente a partir de ellas. Son, también, capaces de elaborar breves escritos, en los que exponen sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

- Esta pregunta busca que el estudiante pueda identificar triángulos notables o las propiedades de los triángulos en una situación con información precisa y en la que no existe exceso de esta.
- El contexto es científico, pues es relativo al campo de la ciencia y de aplicación específica en este contexto.
- El proceso prioritario que permitirá resolver la pregunta es **emplear**, pues utilizan su competencia matemática para dar respuesta a la situación.

### ¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?

#### Desarrollo

- En grupo abierto, lea el contexto inicial y permita que los estudiantes extraigan las ideas principales del mismo. En ese marco, ahonde en el significado de palabras nuevas si es que estas existiesen. Utilice, por ejemplo, palabras como “buques”, “diesel”, “energía eólica”, “velas” o el significado de expresiones como “el impacto del combustible sobre el medio ambiente”.
- Relacione el tema con el país: si se conocen qué tipos de productos se exportan o importan; cuál es el impacto del combustible en el medio ambiente, en relación con los derrames del petróleo o con el uso del combustible y las emisiones de  $\text{CO}_2$ .
- Con los tríos de trabajo formados, presente la pregunta y proporcione tiempo para comprenderlo.
- Indague por la comprensión de la situación; para ello, solicite que se describa la acción y el efecto de que la vela cometa tire del barco. Asimismo, verifique el reconocimiento de los elementos en el gráfico presentado. Por ejemplo, corrobore si se comprende con precisión la extensión de la cuerda, a qué se refiere cada medición y, en función de ello, si se identifica la figura como un tipo especial de triángulo.
- Brinde tiempo para solucionar la pregunta y, luego, socialice en grupo abierto.
- Destaque, en todo momento, que una respuesta se considera correcta, porque los estudiantes han llegado a esa conclusión y no porque el docente dice que lo es.

#### Estrategias de resolución

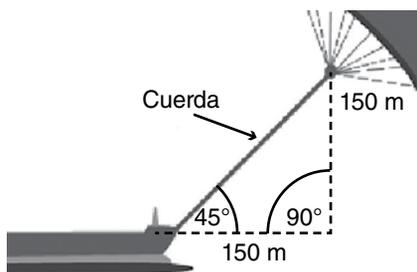
Los procesos que podrían estar en la resolución serían:

- El estudiante interpreta la situación, y reconoce que debe hallar la longitud de la cuerda mostrada en el gráfico.
- Como no se especifica una referencia para la altura de 150 m, los cálculos deben ser hallados para tener una clara interpretación del dato ofrecido:
  - Asumiendo que la altura es respecto de la superficie del barco, se aplica lo aprendido en triángulos notables en Trigonometría o en Geometría.

Por la teoría de triángulos notables, se sabe que es un triángulo rectángulo isósceles, y que a la hipotenusa le corresponde la medida de un cateto multiplicada por raíz cuadrada de dos. En esa medida, la longitud de la cuerda es la siguiente:

Longitud de la cuerda =  $150 \times \sqrt{2} = 150 \times 1,41 = 211,5 \approx 212$

Es posible deducir que el ángulo faltante en el triángulo es de  $45^\circ$  por propiedades de los triángulos y que, por ello, le corresponde la medida de 150. A partir de aquí, se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa. Aunque el cálculo resulta extenso, es válido.



- Longitud de la cuerda =  $\sqrt{150^2 + 150^2} = 150\sqrt{2} = 150 \times 1,4 = 211,5 \approx 212$  y concuerda con la respuesta; no es necesaria otra consideración respecto de la altura.
- Se marca la respuesta B.

### ¿En qué momento puedo proponerla en clase?

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren establecer relaciones métricas en formas bidimensionales como los triángulos rectángulos. Según el DCN esta pregunta aplicable desde el cuarto grado de secundaria.

### Articulación con los mapas de progreso

#### Forma, movimiento y localización

Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas, procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos, superficies de figuras bidimensionales compuestas usando unidades convencionales.

VII ciclo

Figura 3.1.5. Pregunta PISA del Nivel 4

## ¿QUÉ CARRO?

Cristina acaba de obtener su licencia de conducir y quiere comprar su primer carro. La siguiente tabla muestra los detalles de cuatro carros que encuentra en la tienda local de venta de carros usados.



Modelo:	Alfa	Bolte	Castel	Dezal
Año	2003	2000	2001	1999
Precio publicado (zeds)	4800	4450	4250	3990
Distancia recorrida (kilómetros)	105 000	115 000	128 000	109 000
Capacidad del motor (litros)	1,79	1,796	1,82	1,783

### Pregunta

PM985Q03

Cristina tendrá que pagar un 2,5% adicional al precio publicado de los carros, debido a impuestos.

¿Cuánto es el impuesto adicional del Alfa?

Impuesto adicional en zeds: .....

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Calcula un porcentaje a partir del valor de uno de los autos.

**Contenido:** Cantidad

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Personal

**Medida:** 553

**Dificultad:** Nivel 4

**Respuesta correcta:** 120 zeds



• Solo el 2,6% de los estudiantes peruanos logran resolver preguntas de Nivel 4 en PISA.

• Estos estudiantes pueden trabajar con modelos explícitos en situaciones complejas que incluso pueden estar sujetas a condiciones específicas o exigir la formulación de supuestos.

- El contexto es personal, pues los estudiantes, en distintos momentos de su vida, se han enfrentado o enfrentarán a este tipo de cálculo para comunicar un resultado.
- El proceso prioritario que permitirá resolver la pregunta es **emplear**, pues utilizan la competencia matemática para dar respuesta a la situación.

### ***¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?***

#### **Desarrollo**

- Forme tríos de estudiantes e indague sobre el pago de impuestos cuando una persona compra un producto cualquiera o, en particular, un auto. Puede recordar el rol del IGV (impuesto general a las ventas).
- Con los tríos de trabajo formados, presente la pregunta y proporcione tiempo para comprenderlo.
- Indague por el reconocimiento y la comprensión del porcentaje que figura en la pregunta. Si es necesario, permita que unos estudiantes ayuden a recordar este tema. Si no es así, recuerde expresiones equivalentes en decimales y en fracciones; hágalo primero con números enteros positivos que, paulatinamente, se acerquen por analogía a porcentajes de expresiones decimales.
- Brinde tiempo para solucionar la pregunta y, luego, socialice en grupo abierto.
- Destaque en todo momento que una respuesta se considera correcta, porque los estudiantes han llegado a esa conclusión y no porque el docente dice que lo es.

#### **Estrategias de resolución**

- El estudiante interpreta la situación, y reconoce que debe calcular un pago adicional al precio del auto elegido.
- El estudiante debe identificar sobre qué precio se realiza el cálculo, para lo cual debe identificar el 100% que, en este caso, se refiere al precio del alpha y ubicar este dato en la tabla. Asimismo, discrimina que el dato a usar es 4 800 zeds.
- El estudiante interpreta la expresión “2,5% del precio promocionado del auto”, entendida como pago adicional, y lo calcula en función del precio dado del auto alpha:  
Calcula el 2,5% de 4 800:  $2,5 \times 4\ 800 / 100 = 2,5 \times 48 = 120$  zeds
- Responde que se debe pagar 120 zeds por impuestos.

### ***¿En qué momento puedo proponerla en clase?***

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren establecer relaciones de proporcionalidad aplicada a cantidades en contextos comerciales. De acuerdo a ello esta pregunta aplicable desde el segundo grado de secundaria.

#### **Articulación con los mapas de progreso**

##### **Cantidad**

Expresa usando terminologías, reglas y convenciones matemáticas, su comprensión sobre las propiedades de las operaciones con números enteros, racionales y variaciones porcentuales.

VI ciclo

**Figura 3.1.6. Pregunta PISA del Nivel 5**

## VELOCIDAD DE GOTEO

Las infusiones intravenosas (o goteos) son usadas para suministrar líquidos y medicinas a los pacientes.



Las enfermeras necesitan calcular la velocidad de goteo,  $G$ , de las infusiones intravenosas en gotas por minuto.

Elas utilizan la fórmula  $G = \frac{g \cdot v}{60 \cdot n}$  donde

$g$  es el factor de goteo medido en gotas por mililitro (ml).

$v$  es el volumen en ml de la infusión intravenosa.

$n$  es el número de horas que debe durar la infusión intravenosa.

### Pregunta

PM903Q01

Una enfermera quiere duplicar la duración de una infusión intravenosa. Explica con precisión cómo varía  $G$  si  $n$  se **duplica** pero  $g$  y  $v$  no cambian.

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Explica el efecto que tiene en el valor resultante de una fórmula al duplicar el valor de una variable, si las demás variables se mantienen constantes.

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Educativo



- Solo el 0,5% de los estudiantes peruanos logran resolver preguntas de Nivel 5 en PISA.
- Estos estudiantes pueden trabajar con modelos explícitos en situaciones complejas que incluso pueden estar sujetas a condiciones específicas o exigir la formulación de supuestos.

- La pregunta requiere elaborar una estrategia para resolver la situación y comunicarla con claridad para convencer a otros de alguna decisión.
- El contexto es educacional, pues es relativo al campo de un trabajo específico.
- El proceso prioritario que permitirá resolver la pregunta es **emplear**, debido a que los estudiantes utilizan su competencia matemática mostrar el razonamiento que se debe seguir en la situación presentada.

### **¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?**

#### **Desarrollo**

- Forme grupos de tres o cuatro estudiantes y lea el contexto.
- Permita que los estudiantes deduzcan el significado de algunas palabras o frases (como “infusiones intravenosas”), y que recuerden algunas nociones si son necesarias para resolver la situación.
- Céntrese en la observación de la fórmula y las operaciones que en ella están indicadas. Solicite reconocerlas. Indague sobre la comprensión de las expresiones variables en la fórmula y, si lo considera pertinente, determine variados valores numéricos.
- Invite a los estudiantes a participar en todo momento para expresar ideas iniciales para que, luego, vayan completándolas de forma paulatina.
- Con los grupos formados, brinde tiempo para leer la pregunta y que planteen alternativas de solución.
- Posteriormente, socialice en grupo abierto invitando a que participen en la pizarra.

#### **Estrategias de resolución**

- El estudiante interpreta la tarea que hay que realizar. Se podrían distinguir las siguientes partes:
- El estudiante reconoce la variable que identifica el tiempo como “n”, e interpreta el significado de “duplicar el tiempo”; se debe considerar que los otros valores no cambian.
- El estudiante podría recurrir a distintas formas de abordar la solución. Por ejemplo:
  - Recurrir a valores numéricos para observar el impacto y, a partir de ello, brindar su respuesta.
  - Analizar qué ocurre si “n” aumenta al doble. Esto significa que se aumentará el divisor al doble y, por lo tanto (debido a las propiedades de la división), el cociente “G” se reducirá a la mitad.
- Finalmente, la frecuencia de gotas por minutos será la mitad de lo que era antes, es decir, será más lenta.
- Puede extender la comprensión de la fórmula solicitando nuevas variaciones de otras variables; para ello, debe dejar fijas las demás o realizar variaciones simultáneas.

***¿En qué momento puedo proponerla en clase?***

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren interpretar el efecto de una variable en otra cuando estas componen una fórmula o expresión algebraica. De acuerdo a ello esta pregunta aplicable desde el segundo grado de secundaria.

***Articulación con los mapas de progreso*****Regularidad, equivalencia y cambio**

Discrimina información e identifica variables y relaciones no explícitas en situaciones diversas referidas a regularidad, equivalencia o cambio; y las expresa con modelos referidos a patrones geométricos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y relaciones de proporcionalidad inversa.

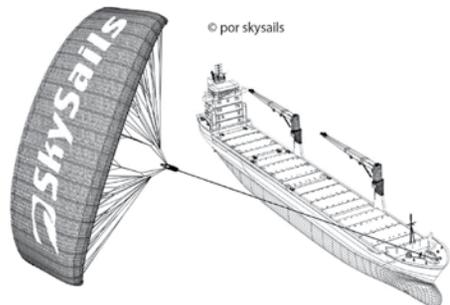
VI ciclo

**Figura 3.1.7. Pregunta PISA del Nivel 6**

**BARCOS A VELA**

Noventa y cinco por ciento del comercio mundial se mueve por mar, por casi 50 000 barcos cisterna, barcos de carga y barcos contenedores. La mayoría de estos barcos utiliza combustible diesel.

Los ingenieros están planeando usar la energía eólica (del viento) como apoyo para los barcos. Su propuesta es sujetar una vela cometa al barco y usar la potencia del viento para ayudar a reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible en el medio ambiente.

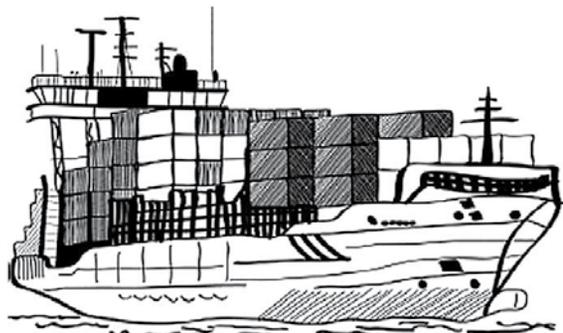


**Pregunta**

PM923Q04

Debido al elevado precio del litro del combustible diesel (0,42 zeds), los propietarios del barco **Nueva ola** están pensando en equipar su barco con una vela cometa. Se estima que una vela cometa puede reducir el consumo de combustible diesel en aproximadamente 20% en total.

- Nombre: Nueva ola
- Tipo: barco de carga
- Longitud: 117 metros
- Ancho: 18 metros
- Capacidad de carga: 12 000 tons
- Velocidad máxima: 19 nudos
- Consumo de diesel por año sin usar una vela cometa: aproximadamente 3 500 000 litros



El costo de equipar el Nueva ola con una vela cometa es 2 500 000 zeds.  
 ¿Después de aproximadamente cuántos años lo que se ahorra en el consumo de combustible diesel cubriría el costo de la vela cometa? Muestra cálculos para sustentar tu respuesta.

Número de años: .....

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Resuelve problemas de situaciones de la vida real que involucran ahorro de costos y consumo de combustible

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Científico

**Respuesta correcta:** El costo de la vela-cometa será cubierto en 8,5 años. pruebas no es correcta.



- Elabora una estrategia para resolver una situación a partir del empleo de los conocimientos que tiene y la información presentada, que es más que suficiente.
- El **contexto** es **científico**, pues es relativo al campo de la ciencia y de aplicación específica en este contexto.
- El **proceso prioritario** que permitirá resolver la pregunta es **formular**, pues el estudiante utiliza su competencia matemática para traducir la situación a una estructura matemática con la que trabaja y con la que, posteriormente, da respuesta a la situación.

• Ningún estudiante peruano logra resolver preguntas de Nivel 6 en PISA.

• En este nivel, los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos de situaciones complejas, a partir de lo cual identifican las condiciones y especifican los supuestos. De igual manera, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas para abordar problemas complejos relacionados con estos modelos. En este nivel, los estudiantes trabajan estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones referidas a estas situaciones. Ellos reflexionan sobre sus acciones, y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

## ¿Cómo puedo utilizar esta pregunta?

### Desarrollo

- Forme grupos de trabajo de tres o cuatro estudiantes, y proporcione un tiempo para que lean la pregunta y se familiaricen con la información presentada. Permita que identifiquen el significado de alguna palabra por el contexto, si es que se considera necesario el dato. Aclare que desconocer con precisión un dato no debe perturbarlos. Esto podría ocurrir con “eslora: 117 metros” o “manga: 18 metros”.
  - Pregunte a los estudiantes si piensan que deben emplear todos los datos y cómo distinguirán cuáles emplearán y cuáles descartarán. Escuche las respuestas y busque que las argumenten. No valide de inmediato las alternativas presentadas. Por el contrario, antes de hacerlo permita que la mayor cantidad de grupos comparta su respuesta.
  - Brinde tiempo para solucionar la pregunta y, luego, socialice en grupo abierto, invitando a que participen en la pizarra. Muestre distintas alternativas de solución si las hubiera.

### Estrategias de resolución

- El estudiante interpreta la situación y reconoce que debe hallar el tiempo en que se recupera el costo de equipar una vela-cometa.
- El estudiante revisa los datos y organiza la estrategia de resolución. Por ejemplo, en la

medida que debe hallar el tiempo en que recupera la inversión, el estudiante discrimina los datos que requiere.

Para averiguar lo gastado en diesel durante un año por el buque sin la vela-cometa y calcular el ahorro con ella, se debe considerar la siguiente información:

- Consumo de diesel al año sin vela: 3 500 000 litros
- Precio del litro de diesel: 0,42 zeds
  - Gasto en diesel en el buque sin vela:  $3\,500\,000 \times 0,42 = 1\,470\,000$  zeds al año.
  - Ahorro de un 20% con la vela-cometa:  $1\,470\,000 \times 0,2 = 294\,000$  zeds al año.

Para averiguar el tiempo necesario para recuperar la inversión, debe servirse de los siguientes datos:

- Costo por equipar la vela-cometa: 2 500 000 zeds
- Ahorro de 20%: 294 000 zeds al año.
  - Como cada año se ahorra 294 000 zeds, el tiempo necesario para recuperar la inversión se obtiene con una división del costo total de la vela-cometa entre el ahorro anual. También, se puede calcular planteando una regla de tres simple:

$$\begin{array}{r}
 \text{Zeds} \qquad \qquad \text{Años} \\
 2\,500\,000 \text{ -----} x \\
 294\,000 \text{ -----} 1 \\
 \text{Luego, } 2\,500\,000 / 294\,000 = 8,5
 \end{array}$$

### ***¿En qué momento puedo proponerla en clase?***

De acuerdo con su planificación, esta actividad podría trabajarla para que sus estudiantes logren establecer relaciones de proporcionalidad aplicada a cantidades en contextos reales. De acuerdo a ello esta pregunta aplicable desde el segundo grado de secundaria.

### ***Articulación con los mapas de progreso***

#### **Cantidad**

Discrimina información e identifica relaciones no explícitas en situaciones referidas a determinar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra y aumentos o descuentos sucesivos y las expresa mediante modelos referidos a operaciones, múltiplos o divisiones, aumentos y porcentajes.

VI ciclo

## 3.2 Adaptación de situaciones al modelo PISA: con énfasis en la diversidad

### Cámara de seguridad<sup>4</sup>

En esta sección, le presentamos al docente una actividad general, de la cual se pueden desprender actividades específicas aplicables a grupos diferenciados. Ello puede incluir contextos multigrados como monogrados en donde, como es usual, las diferencias entre los estudiantes ameriten esta aproximación diversificada.

La situación de aprendizaje inicia con una situación problemática significativa a la que se espera dar respuesta con cada una de las actividades:

- **Situación general:** Actualmente, debido a problemas de inseguridad ciudadana, muchas personas, familias, distintas asociaciones y la ciudadanía en general, pueden recurrir a métodos de vigilancia que centran su acción en el uso de cámaras de seguridad. Sin embargo, ¿sabemos cómo funcionan las cámaras de seguridad y qué garantía nos ofrecen de registrar todo lo que ocurre? ¿Podemos simular la acción de una cámara de seguridad? ¿Hemos observado dónde se colocan? ¿Intuimos cómo funcionan?
- **Aprendizajes esperados generales**
  - Analizar una situación basada en el contexto real mediante el uso de sus conocimientos matemáticos
  - Identificar giros, posibles clases y notaciones
  - Caracterizar y comparar objetos bidimensionales y tridimensionales
  - Identificar vistas de objetos tridimensionales
  - Trazar líneas de mira para decidir qué áreas de una habitación están visibles u ocultas a una cámara
  - Aplicar áreas de triángulos y cuadriláteros, según lo planteado
  - Calcular y comparar porcentajes y/o fracciones de las áreas
- **Procesos matemáticos involucrados**
  - Comunica ideas matemáticas utilizando diversas representaciones.
  - Elabora y aplica diversas estrategias de solución.
  - Construye argumentos viables para sus soluciones y critica el razonamiento de otros.
  - Elabora un modelo matemático.
  - Da sentido a los problemas y persevera en la solución de ellos.
- **Contenidos matemáticos**
  - Razón y proporción
  - Fracciones y porcentajes
  - Área, superficie y volumen
  - Rotación de objetos

<sup>4</sup> Esta actividad se ha adaptado de la propuesta "Cámaras de Seguridad" del proyecto de evaluación de Matemática en la modalidad de evaluación formativa, organizado por la Universidad de Nottingham y la Universidad de Berkeley.

- **Materiales necesarios**

- Una fotocopia de esta actividad para cada estudiante
- Un lápiz y un borrador
- Reglas y block de notas
- Rollos de papel higiénico, hojas cuadriculadas
- Plano para los que realicen la Actividad 3
- Se debe considerar un proyector para ayudar a introducir las actividades y apoyar las discusiones de toda la clase
- De ser posible, una cámara fotográfica, cámara web o similar para uso del profesor. (Podrían utilizarse, incluso, las cámaras de las laptop XO que emplean los estudiantes).

- **Organización del aula**

- Grupos de tres o cuatro estudiantes.

## Actividad general

Genere el diálogo con los estudiantes acerca de la situación planteada. Verifique la comprensión de la actividad, y que los estudiantes conocen cada elemento que interviene. Realice una simulación de algunos casos como el presentado.

¿Alguna vez has visto una cámara de seguridad en algún lugar? ¿Qué aspecto tiene? Si no la has visto, ¿cómo te la imaginas?

Estas son algunas imágenes de tres tipos de cámaras de seguridad:



cámara infraroja



Los estudiantes deben armar una cámara con material reciclable. Pueden usar cajas de cartón, conos de papel higiénico, tijeras, goma, cinta adhesiva, etc.



Luego, incentive la necesidad de saber más sobre las cámaras de seguridad.

## Actividades

### ACTIVIDAD 1: Reconocemos cómo funciona una cámara

(Sugerida para primer y segundo grado de secundaria)

#### Nos familiarizamos con los materiales

Empiece a trabajar con el material concreto que tiene a su disposición. Pida que los estudiantes identifiquen sus elementos y que, posteriormente, los clasifiquen según sus elementos, caras y superficies curvas, y no necesariamente por el tipo de sólidos que son.

Para ello, puede plantear preguntas como las siguientes:

- ¿Cuántas caras tiene?
- ¿Qué forma tienen las caras?
- ¿Cuántas bases tienen?

Posteriormente, puede solicitar el nombre del sólido e identificar todos los que pertenecen a esa clase de sólidos.

- ¿Cómo se llama el sólido?
- ¿Qué sólidos son de ese tipo?
- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

Permita que los estudiantes comparen los distintos tipos de sólidos y encuentren en qué se parecen y en qué se diferencian. Lo pueden hacer a partir de las siguientes preguntas:

- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian un... y un...?
- ¿Qué parte se le tendría que quitar a un... para que sea un...?

Puede ampliar la actividad solicitando que creen un juego que consista en descubrir el nombre de un sólido a partir de pistas referidas a sus características.

Finalmente, armamos una cámara de seguridad con los materiales recolectados.

#### Reconocemos el accionar de la cámara de seguridad

Sabemos que la cámara gira en un mismo plano, pero no sabemos de dónde a dónde, ni qué tipo de imágenes se pueden ver. Por ello, realizaremos dos actividades: una para reconocer las imágenes que se ven con la cámara, y la segunda para investigar sobre los giros.

#### Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de formas, movimientos y localización

#### Capacidades del DCN 2009

Identifica las propiedades de los sólidos geométricos, como cubos, prismas rectos y cilindros rectos. Identifica relaciones de proporcionalidad en situaciones de contexto real.

#### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización

Diseña y ejecuta un plan orientado a la investigación y resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos y distancias en mapas, superficies compuestas y volúmenes usando unidades convencionales, rotar, ampliar, reducir formas o teselar un plano con apoyo de recursos.



### a. Las imágenes que se visualizan en la cámara

Primero, buscaremos conocer cómo podrían ser las imágenes que se visualizan con la cámara, a partir de las siguientes preguntas:

¿Cómo se verán los objetos en una cámara?, ¿Podrían verse iguales?, ¿En qué casos: siempre, a veces o nunca?

- Los estudiantes expresan sus intuiciones y las registran. Luego, las comprueban con la experiencia directa.
- Los estudiantes deben materializar y especificar sus intuiciones. Por ejemplo, solicite medir el largo y el ancho de un objeto (un cuaderno), con centímetros o cuadrículas, y estime qué medidas tendrá la imagen en la cámara. Haga lo mismo con objetos más pequeños, como un caramelo.
- Permita que los estudiantes verifiquen sus intuiciones pidiéndoles que midan la imagen del objeto en una cámara (la del docente o de la computadora) o a partir de las medidas que le pueda dar el docente.
- Extienda este cálculo a otros objetos; es importante considerar que se conserva la distancia de la cámara y que no se mueve el lente o zoom.
- Pida verificar la relación de proporcionalidad.
- Introduzca variaciones, para lo cual puede preguntar qué pasará si se aleja o acerca la cámara, o si se aplica un zoom.
- Oriente la reflexión hacia cómo observan los objetos tridimensionales; si siempre se ven tridimensionales o si en alguna posición o circunstancia se ven planos. Este aspecto se dirige a que los estudiantes, en determinados casos, identifiquen vistas de un objeto. Si lo considera pertinente, puede profundizar en ello.

### b. Los giros que puede hacer la cámara

Nos centramos en los giros. Pida a los estudiantes que conjeturen sobre los movimientos que podrían hacer las cámaras. Permita que ellos indiquen diversos movimientos.

Pregunte para reforzar lo expresado previamente o incrementar las intuiciones:

- ¿La cámara gira verticalmente u horizontalmente?
- Si la cámara no gira, y la ubicamos en un punto, ¿qué panorama se podrá ver desde ella? ¿Qué ángulo se forma en ese caso?
- ¿La cámara gira en un sentido o en dos sentidos?
- ¿Los ángulos se representarán de la misma forma que hasta ahora conocemos o serán diferentes?

Luego, especifique que se centrarán solo en giros en un mismo plano y, usando rollos de papel, pida que muestren cómo sería un giro con la cámara que sea de  $90^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $180^\circ$ .

Invite a los estudiantes a investigar o imaginar dónde se puede colocar una cámara y, a partir de ello, simulen su acción.

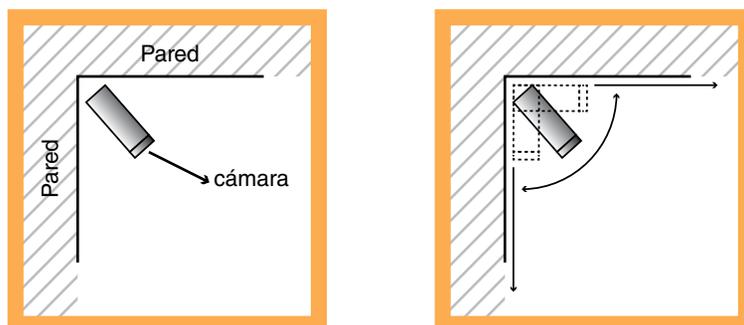
Por ejemplo:

Si te ubicas en una esquina del salón, ¿de qué medida serían los giros que podrías dar?

Los estudiantes miran por el cartón y realizan giros para simular el uso de la cámara. Posteriormente, se pide que se represente lo averiguado.

Por ejemplo:

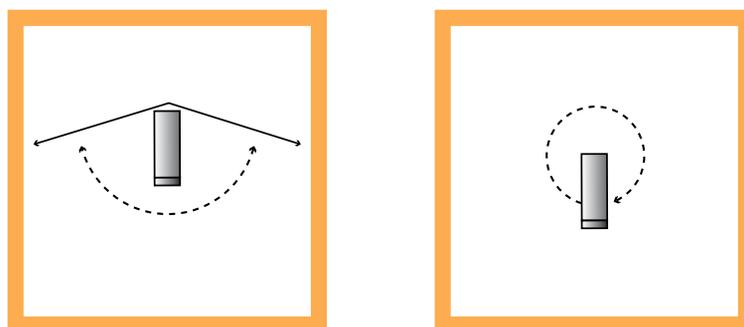
En la esquina del salón, podría ocurrir lo siguiente:



Pida al estudiante que justifique las representaciones mostradas.

Los estudiantes deben realizar variaciones de la posición de la simulación de la cámara.

¿Qué giros se pueden hacer? ¿En qué casos?



Cierre la actividad y genere una reflexión orientada a conocer los requisitos para que un objeto gire en el plano. Asimismo, se debe apuntar a señalar la forma en que se puede representar un giro determinado. Esto último hará referencia a:

- El punto llamado centro de giro
- Una magnitud de giro

A continuación, se debe dirigir la conversación para que permita consolidar la noción de giro horario, antihorario y el punto de referencia para la rotación.

## ACTIVIDAD 2: Reconocemos qué registra una cámara

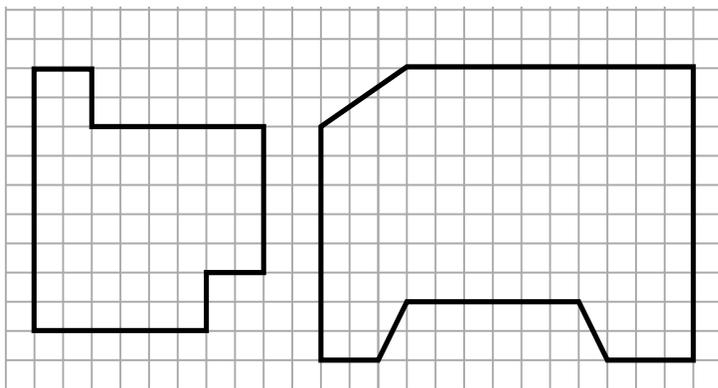
(Sugerida para tercero y cuarto grado de secundaria)

¿Cómo hace la cámara de seguridad el “barrido” de una zona? ¿Habrá locales o salones que necesiten más de una cámara? ¿Pero cómo saberlo? ¿Influye la forma del salón en la cantidad de cámaras que se necesitan? ¿Por qué? Si los locales tienen el mismo tamaño, ¿pueden tener forma distinta?

Todas las preguntas anteriormente planteadas están relacionadas con la noción de área. Por ello, se requerirá profundizar en ella solicitando elaborar, en un papel cuadriculado, un plano de un salón imaginario, que podría ser el de clases, el patio o algún ambiente del colegio (de preferencia con forma poligonal cerrada).

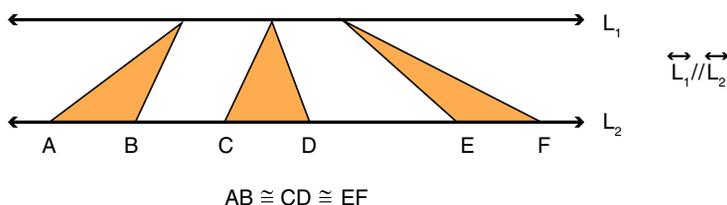
Pida que empiecen por las formas más sencillas y que, luego, lleguen a formas más creativas o elaboradas. Considere que puede haber trazos de líneas oblicuas.

Ejemplos:



Una vez trazado el plano del salón imaginario, pida que determinen al área a partir de la descomposición en figuras conocidas. Luego, hallarán el perímetro en función de las unidades cuadradas (cuadraditos) y los lados del mismo. Tenga en cuenta que un perímetro de lados oblicuos solo puede ser calculado si los estudiantes conocen los números irracionales y el teorema de Pitágoras.

Puede aprovechar este espacio para hacer la extensión a casos de triángulos entre rectas paralelas en el siguiente gráfico:



### Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de formas, movimientos y localización

#### Capacidades del DCN 2009

Formula ejemplos de medición de ángulos en el sistema sexagesimal y radial.  
Resuelve problemas geométricos que involucran el cálculo del área de regiones poligonales.  
Resuelve problemas que involucran el cálculo de elementos geométricos mediante las relaciones métricas en el triángulo rectángulo y el uso del teorema de Pitágoras.

#### Estándar del nivel IV Forma, movimiento y localización

Expresa usando terminología, reglas y convenciones matemáticas, su comprensión sobre propiedades de formas bidimensionales y tridimensionales, ángulos, superficies, volúmenes, transformaciones geométricas, elaborando diversas representaciones de una misma idea matemática usando gráficos y símbolos y las relaciona entre sí.

Luego, pida trasladarlo a la realidad.

Como el dibujo representaba un \_\_\_(dar una medida)\_\_\_, ¿cuánto podría representar un cuadradito? ¿Un paso, una cantidad de centímetros, de metros?

Solicite hallar las medidas reales.

Plantee la situación inversa y solicite que representen las medidas de un local real (salón de clases, patio, etc.) en una hoja cuadriculada. Pueden utilizar medidas arbitrarias (como pasos u otros). Pida que los grupos que han realizado actividades similares expliquen las razones de semejanza que hay entre el plano dibujado y el plano real.

Finalmente, centre la actividad en el uso de la cámara de seguridad y pida representar rápidamente, con puntos, la cantidad de cámaras y su ubicación. Esta ubicación debe ser intuitiva y debe realizarse sobre uno de los planos elaborados (de preferencia, los más complejos). Luego, los estudiantes deben verificar si esa elección intuitiva y rápida ha sido adecuada. Para que la aplicación sea más real, el docente puede indicar el giro máximo que realiza la cámara.

### ACTIVIDAD 3: Elegimos la ubicación de una cámara de seguridad

(Sugerida de tercero a quinto grado de secundaria)

#### Situación inicial:

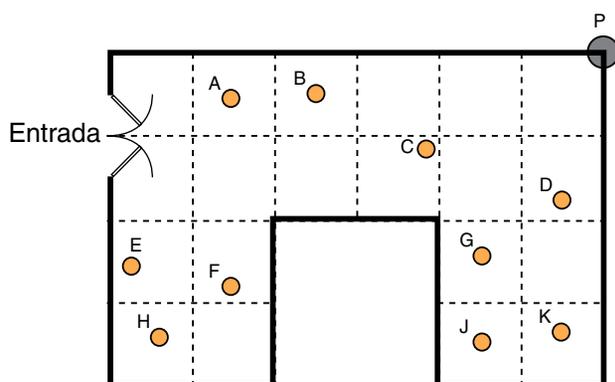
El dueño de una tienda quiere evitar que le roben. Por ello, decide instalar una cámara de seguridad en el techo de su tienda.

La cámara puede girar 360° hacia la derecha.

El dueño de la tienda coloca la cámara en el punto P, ubicado en una esquina de la tienda.

La vista desde arriba muestra dónde están paradas diez personas en la tienda.

Entregue el siguiente plano a cada estudiante:



A continuación, pida a los estudiantes que formulen una situación realista que sugiera la necesidad de contar con una cámara de seguridad.

De acuerdo al plano presentado, los estudiantes deben resolver individualmente:

- a. ¿Qué personas de la tienda no se pueden ver por la cámara ubicada en el punto P? Explica tu respuesta, mostrando claramente en el diagrama cómo llegaste a ella.

Orientaciones:

- Traza líneas y sombrea la parte de la tienda que no logra verse con la cámara.
- Conversa con tus compañeros sobre la altura a la que debe estar la cámara.

Proponga trabajar en pequeños grupos.

- b. El dueño de la tienda dice: "El 15% de la tienda está escondido de la cámara."

Orientación: Explica en el gráfico, con tus propios trazos y cálculos, si esta afirmación es correcta o no.

Pídales que representen, en fracciones decimales, la parte que no se ve y que, con ello, justifiquen el porcentaje.

Contrasten sus respuestas.

Desde este lugar de la cámara (P), ¿cuál es la mayor distancia desde la que puede verse un objeto o persona, sabiendo que el lado de cada cuadrado es una (1) unidad?

#### Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de formas, movimientos y localización

#### Capacidades del DCN 2009

Formula ejemplos de medición de ángulos en el sistema sexagesimal y radial.  
Resuelve problemas geométricos que involucran el cálculo del área de regiones poligonales.  
Resuelve problemas que involucran el cálculo de elementos geométricos mediante las relaciones métricas en el triángulo rectángulo y el uso del teorema de Pitágoras.

#### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización

Elabora y relaciona representaciones de una misma idea matemática, usando mapas, planos, gráficos y recursos

- c. Si tuvieras la oportunidad de proponerle al dueño de la tienda otro lugar donde ubicar la cámara de seguridad, ¿dónde la pondrías? Da tres razones que justifiquen tu propuesta. Escribe la propuesta del grupo en un papelote y exponla en el salón.

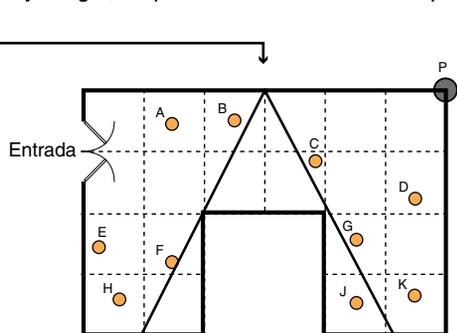
Cada grupo debe pasear por los papelotes interpretando cuál fue la propuesta de cada grupo. En el proceso, formulan propuestas o preguntas para la plenaria final.

En la plenaria, indique si algún grupo tuvo una propuesta igual o muy parecida a la de su grupo. Expliquen. Realicen la plenaria para recibir sugerencias de todos los grupos.

Finalmente, presenten su propuesta mejorada, acogiendo las sugerencias y argumentando su procedimiento.

Algunas soluciones podrían ser:

- E, F y H no pueden ser vistos por la cámara.
- Casi se puede ver todo.
- Este es el mejor lugar, se puede ver a casi todas las personas de la tienda.



- No se puede ver H y F.
- Hay 20 cuadrados en total y 3 cuadrados están ocultos de la cámara, cada cuadrado representa el 5%.  
 $3 \times 5 = 15\%$
- Este es el mejor lugar, se puede ver a casi todas las personas de la tienda.

● = R

Mi cámara

5% está oculto en una mitad

5% está oculto en la otra mitad

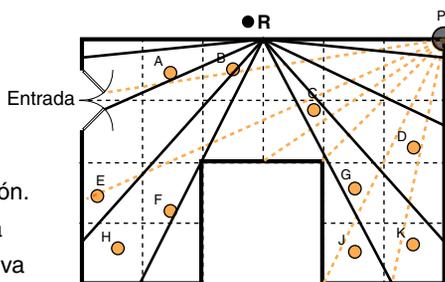
En total está solo el 20% oculto

más el espacio usado por la inclinación.

Este es el mejor lugar para la cámara

porque se puede ver toda la tienda y va

de a



### 3.3. Situaciones de aprendizaje clasificadas por grado

En esta sección, encontrará algunas actividades que le servirán de base para desarrollarlas junto con las actividades que usted ya ha planificado. La intención de estas actividades es que se vayan incluyendo en su planificación de clases a medida que avance en el desarrollo de las clases, o que las adapte de acuerdo a lo que estime conveniente para sus estudiantes.

Se espera que con la implementación de estas actividades, usted pueda enriquecer las oportunidades de aprendizaje que brinda a sus estudiantes. De este modo, contarán con la oportunidad de realizar tareas diferentes que permitan desarrollar sus capacidades en mayor amplitud. Esto es posible en tanto las actividades presentadas tienen un marcado carácter grupal y buscan que los estudiantes se familiaricen con la escucha de ideas distintas, la planificación del trabajo, la toma de decisiones y acuerdos, buscando siempre que los estudiantes realicen trabajos originales y logren trabajar de manera eficiente.

Para facilitar el uso de este material, le presentamos la estructura que tendrá cada actividad:

- **Datos informativos de la actividad:** comprende toda la información relacionada con la pregunta PISA que dio origen a la actividad e indica su nivel. Además, se consideran los datos generales de la actividad, tales como el título, el grado sugerido de aplicación, el tiempo estimado de ejecución, una breve explicación del contexto en el que se desarrolla y la tarea central solicitada a los estudiantes.
- **Planificación de la actividad:** abarca el nivel de PISA asociado a la tarea planteada, los aprendizajes esperados que se pueden planificar en función a la tarea, el listado de los materiales que se necesitan para la actividad (en algunos casos, se colocan los materiales para que sean fotocopiados por los docentes si lo consideran pertinente), la forma de organizar el aula aplicando alguna estrategia específica para determinada forma de trabajo y, finalmente, la alineación de la actividad planificada con los documentos curriculares vigentes. Es preciso recordar que, aunque no exista correspondencia biunívoca entre nuestros documentos curriculares y el marco de evaluación de PISA, es posible identificar el contenido que tiene mayor énfasis en cada pregunta en el DCN, la competencia y el estándar al que se orienta la actividad.
- **Procedimiento que se debe seguir...:** comprende las acciones necesarias para llevar a cabo la actividad de forma completa. Estas acciones se han organizado en tres momentos: inicio, proceso y cierre.

En primer lugar, se presenta una parte a manera de propósito general de este grupo de acciones. Posteriormente, se sugiere la secuencia de pasos a seguir, considerando que usted los puede variar de acuerdo a su grupo de trabajo.

Asimismo, en esta sección, se presentan sugerencias de evaluación en las cajas laterales o en la parte final de la actividad. Se indican, así, los criterios que podrían ser observados en cada etapa o se colocan los instrumentos que podrían ser aplicados en los procesos de autoevaluación, coevaluación, metacognición, entre otros.

Adicionalmente, también podemos encontrar breves notas laterales que van reforzando las ideas trabajadas en la actividad. Estas ideas están relacionadas con el contenido desarrollado, con una estrategia sugerida u otros.

A continuación, presentamos, a manera de ejemplo, la ubicación gráfica referencial de estos elementos en una actividad en concreto.

Figura 3.3.1. Elementos de las actividades propuestas

**Datos informativos de la actividad:**  
 Grado de aplicación  
 Título  
 Tiempo  
 Contexto  
 Tarea  
 Item referencia

### SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Registro de puertos peruanos. Tiempo: 90 minutos

**1. Contexto estímulo**  
 Un primer paso para disminuir la contaminación en las rutas que las embarcaciones siguen por el mar, lagos y ríos es conocer los tipos de puertos que tenemos. Para ello, las autoridades de los puertos del Perú han propuesto actualizar el registro de sus puertos.

**2. Tarea propuesta**  
 Los estudiantes tienen que clasificar los puertos que hay en el Perú y cuantificar los diferentes tipos que existen, mediante porcentajes o representaciones.

**3. Planificación**  
 Los estudiantes pueden ejecutar procedimientos expresados claramente, incluyendo aquellos que demandan una secuencia de decisiones. Además, pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución a problemas sencillos, interpretar y utilizar representaciones a partir de diferentes fuentes de información, y razonar directamente a partir de ellas. También, son capaces de elaborar breves escritos que expongan sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

**3.1. Aprendizaje esperado**  
 • Los estudiantes expresan los números a partir de diversas representaciones (fracciones, decimales y porcentajes).  
 • Los estudiantes plantean estrategias para representar el porcentaje de ocurrencia de una determinada situación.

**3.2. Materiales**  
 • Cuaderno, lápices, regla, etc.  
 • Papeletas, plumones gruesos, cinta adhesiva, libros de otros cursos. Si cuenta con computadora, se usará Excel u hoja de cálculo.  
 • Mapas de puertos en el Perú. Revise las siguientes páginas web:  
 - [http://www.mtc.gov.pe/estadisticas/IMPAS/WEB/TRANSPORTES/puertos\\_peru08.pdf](http://www.mtc.gov.pe/estadisticas/IMPAS/WEB/TRANSPORTES/puertos_peru08.pdf)  
 - <http://redednavae.apn.gob.pe/informordenave/>  
 • Los dos minutos iniciales de un video motivador sobre el puerto del Callao: <http://www.youtube.com/watch?v=cKPNb5r6mDp>

**Alineación con documentos curriculares peruanos**  
 Indicador de los Puntos del Aprendizaje: Emplear estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren cuatro operaciones con decimales, fracciones y porcentajes.  
 Estándar del nivel II: Identifica y emplea diversas representaciones de un mismo dato matemático (cuenta léxica y simbólica, relaciones entre sí).  
 Busca y muestra un plan personal de investigación y resolución de problemas, describiendo el proceso, postulando hipótesis, realizando pruebas, autocrítica, autoevaluación y retroalimentación.

### Procedimientos a seguir...

**4. Procedimiento que debe seguir**

**Inicio**

- Los grupos entran en contacto con el problema a solucionar y planifican las acciones a realizar.
- Los estudiantes están organizados en grupos y usted presenta la tarea a realizar. Permita que los estudiantes se organicen, establezcan con claridad los puntos que deben trabajar e identifiquen qué es lo que les agobia de ellos. Este será el momento en el que los estudiantes generarán preguntas relativas a lo que requiere la tarea: dónde podrán conseguir información; cómo se espera que presenten el trabajo final, entre otras.

**Proceso:**

- Los estudiantes desvelan la dinámica de trabajo planteada.
- Los estudiantes trabajan según lo planificado. Pueden incluir algunas variaciones a la presentación de su producto final.

Procure que, en todo momento, muestren las diferencias entre la estimación inicial del área del departamento y el cálculo final de esa área. Además, pídales que argumenten el procedimiento de cálculo que han empleado. Se puede animar a los estudiantes a realizar "pruebas dinámicas" con objetos concretos o aplicando las TIC.

**Cierre:**

- Los grupos deben culminar la tarea propuesta y exponer sus trabajos.
- Revisé paulatinamente el trabajo de cada grupo y solicite que los presenten a toda la clase. Brinde tiempo a los estudiantes para que puedan ver y revisar todos los trabajos. Pueden tomar nota de ideas resaltantes o de posibles preguntas que puedan ser planteadas posteriormente.

Luego de este lapso, convoque a un período de reflexión grupal de diez o quince minutos, sobre lo realizado. En este, se deben presentar brevemente los resultados. Asimismo, se debe propiciar preguntas que deben ser respondidas entre los estudiantes o con ayuda del docente.

**5. Posible estrategia de solución (estimación: área de la sección del departamento)**  
 Por descomposición y conteo de piezas visuales.  
 El estudiante calcula el área de la sección del departamento por descomposición en figuras conocidas y medición en cuadros de

**Puntos para planificar**

**Planificar:**

- Identificar los recursos y para momento para hacer una tarea
- Decidir qué, cuándo y cómo se va a hacer algo

**Para planificar, los estudiantes, pueden utilizar las siguientes estrategias:**

- Usar los conocimientos que tienen
- Obtener las actividades en función de la necesidad y oportunidad
- Estimar el tiempo que le va a tomar
- Organizar un orden lógico para poder cumplir con el tiempo

**Procedimientos a seguir...**  
 Inicio  
 Proceso  
 Cierre  
 Evaluación sugerida

**Planificación de la actividad:**  
 Aprendizajes esperados  
 Materiales  
 Alineación con documentos curriculares peruanos  
 Organización del aula

### 3.3. Organización del aula

Dinámica de trabajo: **Novato a experto**

Esta dinámica de trabajo se basa en que todos somos novatos cuando empezamos una labor. Sin embargo, mientras más practicamos, experimentamos, acertamos y nos equivocamos, vamos desarrollando mayor capacidad para sobrellevar con éxito las actividades relacionadas con la labor que empezamos.

En primer lugar, construya la experiencia en un grupo inicial. Luego de adquirir experiencia en ese tipo de actividad, intercambie los grupos. Hágalo de tal manera que nuestros estudiantes compartan la experiencia adquirida y se fortalezcan las relaciones de intercambio entre los integrantes de los grupos. Cabe anotar que este esquema de trabajo puede desarrollarse para cada una de las actividades que se proponen al interior de una situación o según usted lo considere pertinente.

Se puede realizar en dos fases, como se explica a continuación y se grafica a la derecha.

- Primera fase**  
 Grupos para desarrollar experiencia. Los estudiantes se agrupan según sus propios intereses.
- Segunda fase**  
 Grupos para compartir la experiencia adquirida y desarrollar la comunicación.

**¿Cómo evaluar la formación de equipo?**

Considere las siguientes:

- Organización:** En situaciones de aula, los estudiantes saben un secretario y participativo.
- Cooperación:** Los estudiantes de un grupo se ayudan entre sí y se apoyan mutuamente.
- Responsabilidades:** Cada uno de los miembros del grupo tiene un rol y el trabajo se reparte entre los miembros del grupo.

Existen varias

$Área = A \times A$

Introduzca el uso de expresiones equivalentes al porcentaje. Para ello, utilice afirmaciones sobre lo investigado con fracciones o decimales. Estas tendrán que ser analizadas por los estudiantes para definir si son verdaderas o falsas. Deben justificar su elección con información precisa.

Para elaborar las afirmaciones que serán analizadas, considere lo siguiente:

- Emplee el 100% acordado por consenso y las distintas clasificaciones determinadas por los grupos.
- Incluya fracciones usuales o equivalentes a ellas, como 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10, 2/3, 3/4, entre otras.
- Simule de diversas representaciones de la información: en texto, con expresiones formales o coloquiales, en gráficos continuos o discretos, en la recta numérica, entre otros.
- Emplee decimales usuales o equivalentes a ellos como 0.10, 0.20, 0.25, 0.50, 0.75, 0.80, entre otros. En este caso, es de mucha utilidad emplear expresiones decimales con una y dos cifras decimales.
- Introduzca estimaciones y comparaciones.

Algunos ejemplos de las afirmaciones que debe presentar a los estudiantes pueden tener la siguiente estructura o ser las siguientes:

- Más de la mitad de los puertos peruanos está en la costa.
- Un tercio de los puertos en la selva está practico.
- Aproximadamente, el 0,10 de los puertos peruanos está en cierre.
- El total de puertos peruanos puede ser representado con el siguiente gráfico:

**¿Cuándo una fuente es confiable?**

Analizar y emplear fuentes confiables en Internet resulta importante:

- Consultar la presencia e integridad de los datos.
- Verificar el grado de su confiabilidad, seriedad e integridad de la información.
- Analizar que el documento contenga una lista de referencias consultadas.

Sea más de una fuente para la información que quiere presentar.

**Rubricas de evaluación de producto**

	Inadecuado (0 puntos)	Buena (2 puntos)	Excelente (3 puntos)
Apoyos gráficos (visual)	Faltan los datos y gráficos	Falta un aspecto	Trabajo completo
Uso de fuentes (visual)	Con retraso	En el tiempo acordado	Antes del tiempo acordado
Uso de fuentes (textual)	Sin intenciones bibliográficas	Con límites, en su mayoría, parte, confiables	Con fuentes confiables totalmente
Redacción y ortografía	Redacción confusa con errores ortográficos	Redacción comprensible, buena de los datos ortográficos	Redacción adecuada y buena ortografía
Organización y estructura	Desordenada	Clara y comprensible	Novadora y ordenada

**Evaluación sugerida**

Considere los criterios y los niveles de evaluación del producto (estructura y contenido) en los resultados.

Use el producto obtenido en la actividad, sugiera que cada grupo prepare en la computadora y edite el producto.

Cajas laterales con recomendación

Las situaciones de aprendizaje se presentan ordenadas de acuerdo al grado en el que se pueden desarrollar.

# PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Estimación y cálculo del área

Tiempo: 60 minutos

## 1. Contexto estímulo

El petróleo es un recurso que tiene derivados no energéticos, como el vinisol (piso vinílico). Estos pisos, generalmente, son aislantes de la electricidad, no son inflamables y se instalan con un pegamento.

## 2. Tarea propuesta

Se quiere averiguar el área de un sector de un departamento, a partir del plano dibujado por la constructora. Esta empresa ofrece cubrir el piso con vinisol cuadrado. El vinisol puede ser de tamaño semejante a las mayólicas que ofrece el mercado. Los estudiantes deben realizar las siguientes actividades:

- Estimar la medida del departamento intuitivamente
- Estimar la medida de una habitación o de una sección del departamento por observación directa (en unidades convencionales)
- Averiguar las posibles medidas del vinisol
- Estimar y calcular las medidas de los ambientes escogidos, para lo cual deben considerar las posibles medidas del vinisol y la cantidad de piezas que se aprecia en la imagen (en unidades convencionales)
- Verificar la coherencia de la estimación con otros referentes.
- Buscar posibles formas de mejorar la estimación.

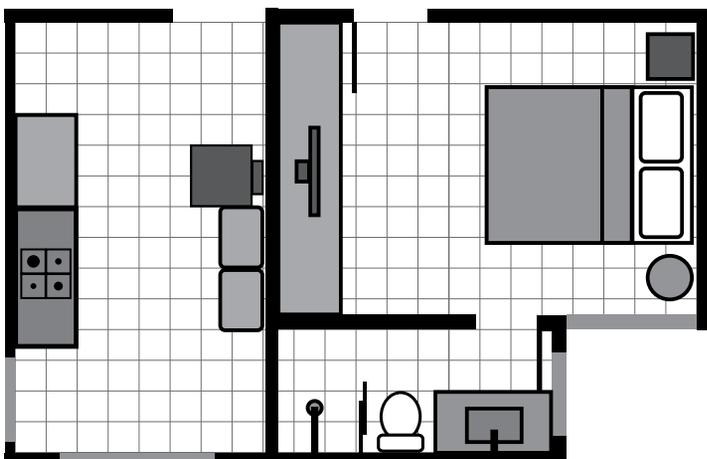


Figura 1. Plano de la sección del departamento

### Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización.

#### Indicador de las Rutas del Aprendizaje

Usa mapas o planos a escala al plantear y resolver un problema. Emplea el modelo más pertinente relacionado a figuras poligonales y sus propiedades al plantear y resolver problemas. Emplea estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros, para resolver problemas de perímetro y área del triángulo, rectángulo, cuadrado, rombo.

#### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización

Diseña y ejecuta un plan orientado a la investigación y resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos y distancias en mapas, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; rotar, ampliar, reducir formas o teselar un plano, con apoyo de diversos recursos.

### 3. Planificación

Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. De igual modo, pueden extraer información relevante a partir de una única fuente y hacer uso de un solo modo de representación. A su vez, utilizan algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas. También, son capaces de realizar razonamientos directos e interpretaciones literales de sus resultados.

#### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes expresan sus estimaciones y muestran los criterios referenciales que toman en cuenta.
- Los estudiantes estiman y calculan el área del departamento a partir de la medida de una pieza de vinisol. Luego, verifican los cálculos con alguna otra referencia.

#### 3.2. Materiales

- Imagen del departamento o de parte de él.
- Medidas posibles de losetas o mayólicas, así como de algún otro elemento de la imagen que sirva como referencia. Pueden ser, por ejemplo, las medidas de la cama o de la cocina, que suelen ser estándares.

#### 3.3. Organización del aula

Forme grupos homogéneos de tres o cuatro estudiantes. Una manera de hacerlo podría ser a través de la técnica “Línea de valor”. Para llevarla a cabo, el docente presenta el tema a la clase y pide a cada estudiante que explique cómo se siente con respecto al tema. Para ello, usa una escala, por ejemplo, de 1 a 10, en la cual 1 corresponde al menor grado de comodidad; y 10, al mayor grado de comodidad.

Después, forma una línea basada en rangos, y enumera a los participantes del 1 al 10. Enseguida, forma los grupos tomando a una persona de cada extremo de la línea de valor y uno o dos del centro del grupo (por ejemplo, si se tiene a veinte estudiantes, un grupo puede ser formado por el primero, el diez, el once y la última persona de la línea de valor).

Dinámica de trabajo: **Solución de problemas y pensamiento en voz alta**

El docente debe dar un tiempo para que todos los grupos comprendan la tarea y planifiquen lo que harán. Luego, determinará un tiempo para que cada uno de los integrantes de los equipos participe. La rotación en la participación podría darse cada cinco u ocho minutos.

Los estudiantes establecerán turnos de participación. Una de las personas actuará como el solucionador de problemas; y las otras, como las personas que escuchan. El primero verbalizará todo lo que piensa tratando de resolver el problema. Si este no ha generado las ideas suficientes, las personas que escuchan deben motivar a su compañero a seguir hablando, y seguir generando soluciones o pistas. Los roles se intercambiarán para el siguiente turno. Se debe proceder así hasta terminar con el problema.

#### Información para el docente

- *Medidas usuales de las mayólicas cuadradas:*
  - 20 cm x 20 cm
  - 30 cm x 30 cm
  - 40 cm x 40 cm
  - 45 cm x 45 cm
- *Medidas usuales de colchón en Latinoamérica*
  - 3 plazas (200 cm x 200 cm)
  - King o 2 plazas y media (160 cm x 200 cm)
  - Queen o 2 plazas (140 cm x 200 cm)
  - Full o plaza y media (120 cm x 200 cm)
  - Una plaza (100 cm x 200 cm)
- *Medidas usuales de cama en Latinoamérica (esta varía de acuerdo con el diseño de la cama en sí misma).*
  - Una plaza  
ancho: 80 cm - 90 cm - 105 cm; largo: 1,80 m - 1,90 m - 2 m.
  - Matrimonial  
ancho: 1,20 m - 1,35 m - 1,50 m - 1,60 m; largo: 1,80 m - 1,90 m - 2 m.
  - Queen  
ancho: 1,80 m; largo: 1,90 m.
  - King  
es del ancho de dos camas de una plaza.
- *Medidas usuales de una puerta: entre 90 y 100 centímetros.*

#### 4. Procedimiento que debe seguir...

##### Inicio:

- Los grupos entran en contacto con el problema a solucionar y planifican las acciones a realizar.

Los estudiantes están organizados en grupos y usted presenta la tarea a realizar. Permita que los estudiantes se organicen, establezcan con claridad los puntos que deben trabajar, e identifiquen qué es lo que se espera de ellos. Este será el momento en el que los estudiantes generarán preguntas relativas a lo que requiere la tarea: dónde podrán conseguir información; cómo se espera que presenten el trabajo final, entre otras.

##### Proceso:

- Los estudiantes desarrollan la dinámica de trabajo planteada. Los estudiantes trabajan según lo planificado. Pueden incluir algunas variaciones a la presentación de su producto final.

Procure que, en todo momento, muestren las diferencias entre la estimación inicial del área del departamento y el cálculo final de esa área. Además, pídale que argumenten el procedimiento de cálculo que han empleado. Se puede animar a los estudiantes a realizar “pruebas dinámicas” con objetos concretos o aplicando las TIC.

##### Cierre:

- Los grupos deben culminar la tarea propuesta y exponer sus trabajos.

Revise paulatinamente el trabajo de cada grupo y solicite que los presenten a toda la clase. Brinde tiempo a los estudiantes para que puedan ver y revisar todos los trabajos. Pueden tomar nota de ideas resaltantes o de posibles preguntas que puedan ser planteadas posteriormente.

Luego de este lapso, convoque a un período de reflexión grupal, de diez o quince minutos, sobre lo realizado. Aquí se deben presentar brevemente los resultados. Asimismo, se debe propiciar preguntas que deben ser respondidas entre los estudiantes o con ayuda del docente.

#### 5. Posible estrategia de solución (estimación: área de la sección del departamento)

Por descomposición y conteo de piezas vinisol:  
El estudiante calcula el área de la sección del departamento por descomposición-composición en figuras conocidas y medición en cuadros de vinisol.

Existen varias posibilidades:

$$\text{Área} = \text{ÁA} + \text{ÁB} - \text{ÁC}$$

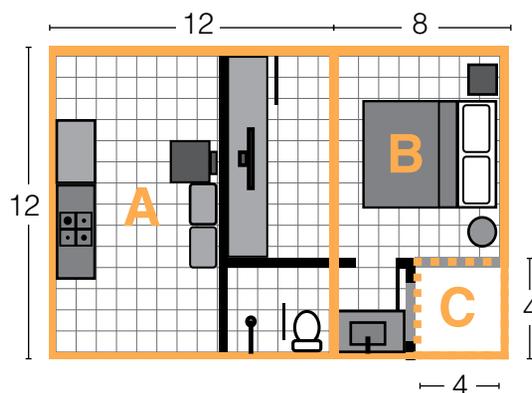
#### Pautas para planificar

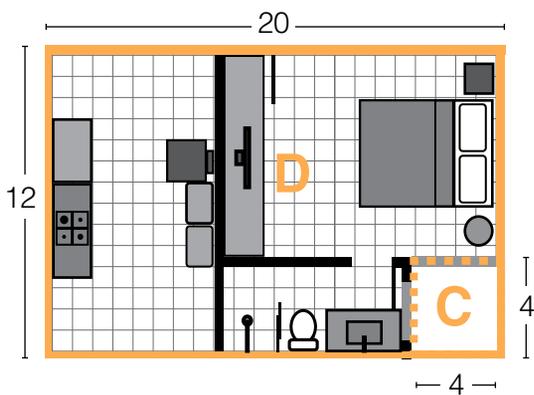
##### Planificar es:

- Identificar los recursos y pasos necesarios para hacer una tarea
- Decidir qué, cuándo y cómo se va a hacer algo

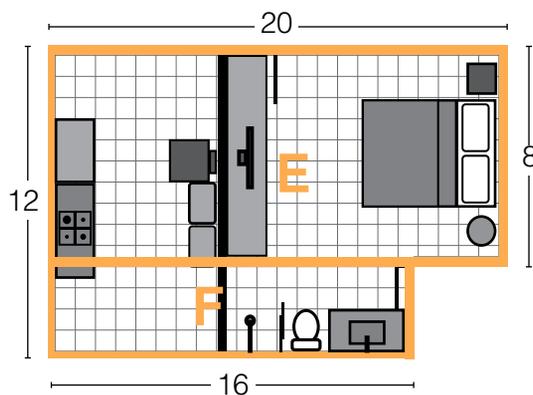
Para planificar, los estudiantes, pueden realizar las siguientes actividades:

1. Listar las cosas que deben hacer y los materiales que necesitan
2. Ordenar las actividades en función de la necesidad e importancia
3. Estimar el tiempo que toma cada actividad
4. Programar en orden inverso para saber cuándo se debe empezar





Área =  $\hat{A}D - \hat{A}C$



Área =  $\hat{A}E + \hat{A}F$

Se pueden realizar los cálculos con las medidas de cuadrados de vinisol. De este modo, se obtienen, diversas formas; aproximadamente, los siguientes resultados: Área de la sección del departamento (en cuadrados de vinisol):

$= \hat{A}A + \hat{A}B - \hat{A}C$

$= (12)^2 + 8 \times 12 - (4)^2$

$= 144 + 96 - 16$

$= 224$

$= \hat{A}D - \hat{A}C$

$= 20 \times 12 - (4)^2$

$= 240 - 16$

$= 224$

$= \hat{A}E + \hat{A}F$

$= 20 \times 8 + 16 \times 4$

$= 160 + 64$

$= 224$

**Consideraciones en los cálculos**

Las cantidades de piezas de vinisol deben enunciarse en partes enteras si trabaja con números naturales, o en fracciones o decimales conocidos si trabaja con los racionales. Recomiende el uso de 0,5; 0,25; 0,75 y sus equivalentes en fracciones.

Tome en cuenta que las estimaciones harán variar los resultados, pero el margen no debe ser muy amplio.

Las medidas se pueden convertir a unidades convencionales en función del área de una pieza de vinisol.

Si el ancho de una puerta es, aproximadamente, un metro o más, la pieza de vinisol podría ser de 40 cm x 40 cm.

Entonces, el área de la sección del departamento sería:

Área de una pieza de vinisol:  $(40)^2 = 1\ 600\text{ cm}^2$

Área de la sección del departamento:

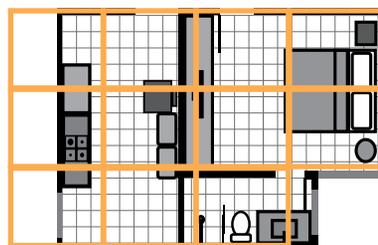
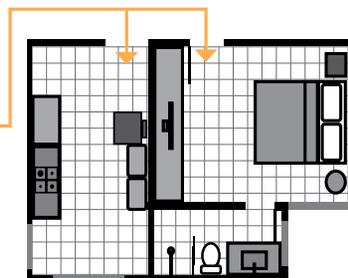
$224(1\ 600) = 358\ 400\text{ cm}^2 = 35,84\text{ m}^2$

**Por estimación con un objeto del departamento:**

El estudiante calcula el área de la sección del departamento a partir de un mueble, como la cama del dormitorio principal. A partir de ello, se estima que en la sección del departamento vacío habría espacio para 9,5 camas una junto a la otra. Entonces, el área de una cama es  $180 \times 200 = 36\ 000\text{ cm}^2$

Por ende, el área de la sección del departamento es

$36\ 000 \times 9,5 = 342\ 000\text{ cm}^2 = 34,20\text{ m}^2$



Los estudiantes se evalúan usando la siguiente tabla de coevaluación con una escala de valoración del 1 al 4.

	Coevaluación (escribe los nombres de los evaluados)		
	_____	_____	_____
Interés en la tarea			
Aportes al grupo			
Responsabilidad individual			
Responsabilidad por cumplir la meta			
Empatía y asertividad			

Este instrumento debe ser aplicado por cada integrante. Al finalizar, se presentan los resultados a cada participante.

### EVALUACIÓN DE ACTITUDES

(para ser respondida personalmente)

Completa las oraciones de acuerdo a cómo te has sentido al trabajar esta actividad.

- En esta actividad, lo que me gustó más fue \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- En esta actividad, lo que me gustó menos fue \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- El consejo que más me ayudó en esta actividad fue \_\_\_\_\_
- En esta actividad, me he sentido \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- En esta actividad, me divertí cuando \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- Entendí cómo resolver la actividad cuando explicaron que \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- Cuando no sé algo, me siento más seguro preguntando a \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_
- Me motivó a resolver actividades matemáticas cuando \_\_\_\_\_

### Evaluación sugerida

Los criterios para evaluar los resultados podrían ser los siguientes:

- Procedimientos efectivos de desarrollo de la tarea
- Pertinencia de la selección usada para comparar
- Puntos de vista, variaciones o limitaciones contempladas en las mediciones
- Nivel de reflexión

La información recogida en la ficha sobre actitudes puede ayudarle a orientar las diferentes actividades realizadas con los estudiantes.

# SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Registro de puertos peruanos

Tiempo: 120 minutos

## 1. Contexto estímulo

Un primer paso para disminuir la contaminación en las rutas que las embarcaciones siguen por el mar, lagos y ríos es conocer los tipos de puertos que tenemos. Para ello, las autoridades de los puertos del Perú han propuesto actualizar el registro de sus puertos.



## 2. Tarea propuesta

Los estudiantes tienen que clasificar los puertos que hay en el Perú y cuantificar los diferentes tipos que existen, mediante porcentajes o representaciones equivalentes.

## 3. Planificación

Los estudiantes pueden ejecutar procedimientos expresados claramente, incluyendo aquellos que demandan una secuencia de decisiones. Además, pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución a problemas sencillos; interpretar y utilizar representaciones a partir de diferentes fuentes de información; y razonar directamente a partir de ellas. También, son capaces de elaborar breves escritos que expongan sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes expresan los números a partir de diversas representaciones (fracciones, decimales y porcentajes).
- Los estudiantes plantean estrategias para representar el porcentaje de ocurrencia de una determinada situación.

### 3.2. Materiales

- Cuaderno, lápices, regla, etc.
- Papelotes, plumones gruesos, cinta adhesiva, libros de otros cursos. Si cuenta con computadora, se usará Excel u hoja de cálculo.
- Mapas de puertos en el Perú. Revise las siguientes páginas web:
  - [http://www.mtc.gob.pe/estadisticas/MAPAS/WEB/TRANSPORTES/puertos\\_peru08.pdf](http://www.mtc.gob.pe/estadisticas/MAPAS/WEB/TRANSPORTES/puertos_peru08.pdf)
  - <http://eredenaves.apn.gob.pe/inforedenaves/>
- Los dos minutos iniciales de un video motivador sobre el puerto del Callao: Ver <http://www.youtube.com/watch?v=ckPNbSnm3ps>

### Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad

**Indicador de las Rutas del Aprendizaje**  
Emplea estrategias heurísticas para resolver problemas que combinen cuatro operaciones con decimales, fracciones y porcentajes.

### Estándar del nivel VI Cantidad

Elabora y emplea diversas representaciones de una misma idea matemática usando tablas y símbolos; relacionándolas entre sí.

Diseña y ejecuta un plan orientado a la investigación y resolución de problemas empleando estrategias heurísticas, procedimientos para calcular y estimar con porcentajes, números enteros, racionales y notación exponencial.



### 3.3. Organización del aula

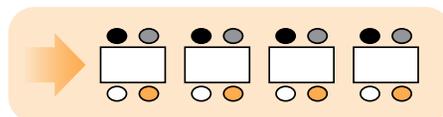
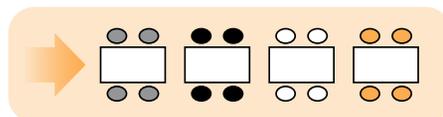
Dinámica de trabajo: **Novato a experto**

Esta dinámica de trabajo se basa en que todos somos novatos cuando empezamos una labor. Sin embargo, mientras más practicamos, experimentamos, acertamos y nos equivocamos, vamos desarrollando mayor capacidad para sobrellevar con éxito las actividades relacionadas con la labor que empezamos.

En primer lugar, construya la experiencia en un grupo inicial. Luego de adquirir experticia en ese tipo de actividad, intercambie los grupos. Hágalo de tal manera que nuestros estudiantes compartan la experiencia adquirida y se fortalezcan las relaciones de intercambio entre los integrantes de los grupos. Cabe anotar que este esquema de trabajo puede desarrollarse para cada una de las actividades que se proponen al interior de una situación o según usted lo considere pertinente.

Se puede realizar en dos fases, como se explica a continuación y se grafica a la derecha.

- **Primera fase**  
Grupos para desarrollar experticia: Los estudiantes se agrupan según sus propios intereses.
- **Segunda fase**  
Grupos para compartir la experticia adquirida y desarrollar la comunicación.



### ¿Cómo evaluar la formación del equipo?

Considere los siguientes criterios:

- Organización:**  
Los estudiantes se distribuyen funciones como coordinador, secretario y participante directo.
- Cooperación:**  
Los estudiantes de un mismo grupo se ayudan entre todos para lograr el objetivo común.
- Responsabilidad:**  
Cada uno de los estudiantes es responsable de su parte del trabajo y del trabajo final que pertenece al grupo.

#### 4. Procedimiento que debe seguir...

##### Inicio:

El estudiante se familiariza con el tema de la actividad y con la tarea específica. Luego, responde, entre otras preguntas, a las siguientes: “¿Qué es un puerto?”, “¿Cuáles son los principales puertos del Perú?”, “¿Qué tipos de puertos hay?”, “¿Cuál es el puerto más cercano a mi localidad?”, “¿Qué tipo de funciones realizan los puertos?”, “¿Cuál es su importancia para el Perú?”

Los estudiantes se organizan y usted motiva la actividad. Para ello, mencione algún dato interesante sobre el desarrollo del país y el comercio realizado mediante el uso de puertos. Puede mostrar los dos primeros minutos del video motivador o leer alguna información relacionada con los puertos.

El estudiante pregunta sobre lo observado y el docente anota las inquietudes y plantea las interrogantes. Asimismo, el docente organiza todas las ideas que ha anotado y presenta la tarea a ser realizada. También, menciona que el trabajo final se debe entregar de forma creativa en los papelotes, a través dibujos y esquemas. La información solicitada debe ser expuesta en porcentajes.

##### Proceso:

El estudiante podrá cubrir las siguientes inquietudes: “¿Cómo podemos realizar la tarea planteada?”, “¿Dónde lo podemos averiguar?”, “¿Es necesario averiguar todo o se puede estimar a partir de una parte?”, “¿Cómo podemos registrar esa información?”

Entregue el mapa mostrado en la página anterior o pida que busquen esa información en Internet.

Oriente para que los estudiantes lleven a cabo las siguientes actividades:

- Lleguen a un acuerdo sobre la cantidad total de puertos que se considerarán como el 100% de los puertos en el Perú. Tenga en cuenta que esta información se basa en lo que los estudiantes encontraron. Promueva el consenso sobre este dato, de acuerdo con la información que compartan todos: el dato más actualizado, la fuente oficial, entre otros.
- Clasifiquen los principales puertos del Perú (sobre el 100% consensuado) a partir de un criterio: función del puerto, ubicación (costa, sierra, selva), tipo de recurso hídrico (mar, río o lago), categoría, entre otros. Comuníqueles el criterio con anticipación. Cada uno de los grupos se encargará de un tipo de clasificación.
- Cuantifiquen los principales puertos y expresen, en términos de porcentaje (respecto del total), cuántos puertos de cada tipo existen. Puede sugerir diversas formas de trabajo grupal.

Los estudiantes establecen su estrategia de trabajo y la realizan recordando que cada integrante podría explicar lo realizado. Luego, elaboran la presentación personal de los resultados.

#### ¿Cómo evaluar la formación del equipo?

Puede asignar puntos a los estudiantes que consiguieron información, de fuentes confiables, sobre los siguientes temas:

- *Descripciones e imágenes de los tipos de puertos*
- *Las preguntas planteadas en el cuadro de la fase de INICIO*

Además, puede dar puntos extra por el uso de una fuente novedosa, como una entrevista o un recorte actualizado.

#### Información para el docente

- *Entre 80% y 90% del comercio mundial se realiza a través de los puertos.*
- *El transporte en barco es más económico que el terrestre y que el aéreo.*
- *Existen tipos de puertos según su funcionamiento:*
  - **Comerciales:** *transbordo de mercancías del barco al transporte terrestre y marítimo*
  - **Pesqueros:** *puertos pequeños con instalaciones sencillas*
  - **Deportivos:** *puertos con instalaciones especializadas para deportes náuticos*
  - **Bases militares:** *protegen al país. Su ubicación es estratégica.*
- *Puertos según categoría:*
  - **Mayor:** *usado para el comercio nacional e internacional*
  - **Menor:** *usado solo para exportar*
  - **Caleta:** *puerto habilitado u ocasional para el embarque y desembarque de mercadería*

Introduzca el uso de expresiones equivalentes al porcentaje. Para ello, utilice afirmaciones sobre lo investigado con fracciones o decimales. Estas tendrán que ser analizadas por los estudiantes para definir si son verdaderas o falsas. Deben justificar su elección con información precisa.

Para elaborar las afirmaciones que serán analizadas, considere lo siguiente:

- Emplee el 100% acordado por consenso y las distintas clasificaciones determinadas por los grupos.
- Incluya fracciones usuales o equivalentes a ellas, como  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/10$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ , entre otras.
- Sírvasse de diversas representaciones de la información: en texto, con expresiones formales o coloquiales, en gráficos continuos o discretos, en la recta numérica, entre otros.
- Emplee decimales usuales o equivalentes a ellas como 0,10; 0,20; 0,25; 0,50; 0,75; 0,80; entre otros. En este caso, es de mucha utilidad emplear expresiones decimales con una y dos cifras decimales.
- Introduzca estimaciones y comparaciones.

Algunos ejemplos de las afirmaciones que debe presentar a los estudiantes pueden tener la siguiente estructura o ser las siguientes:

- *Más de la mitad de los puertos peruanos está en la costa.*
- *Un tercio de los puertos en la selva está inactivo.*
- *Aproximadamente, el 0,10 de los puertos peruanos está en cierre.*
- *El total de puertos peruanos puede ser representado con el siguiente gráfico.*



- *En el Perú, la cantidad de puertos cerrados es la novena parte de los puertos abiertos.*

### Rúbricas de evaluación de producto

	Insuficiente (4 puntos)	Bueno (6 puntos)	Excelente (8 puntos)
Aspectos cubiertos	Faltan dos o más aspectos	Falta un aspecto	Trabajo completo
Puntualidad	Con retraso	En el tiempo acordado	Antes del tiempo acordado
Uso de fuentes	Sin referencias bibliográficas	Con fuentes, en su mayor parte, confiables	Con fuentes confiables totalmente
Redacción y ortografía	Redacción confusa y con once o más faltas ortográficas	Redacción comprensible; hasta diez faltas ortográficas.	Redacción adecuada y hasta cinco faltas ortográficas
Organización y creatividad	Desordenada	Ordenada y convencional	Novedosa y ordenada

### ¿Cuándo una fuente es confiable?

Para buscar y emplear fuentes confiables en Internet realiza lo siguiente:

- Corroborar la presencia e información sobre el autor o autores.
- Verifica el respaldo de alguna editorial, universidad o institución dedicada a la investigación.
- Revisa que el documento contenga una lista de referencias consultadas.

Usa más de una fuente para la información que quieres presentar.

### Evaluación sugerida

Comunique los criterios y los niveles de evaluación del producto o proceso, o elabórellos con los estudiantes.

- Para el producto solicitado en la actividad, se sugiere que todo el grupo participe en la comprensión y evaluación del producto.

**Cierre:**

Cada estudiante se cambia a un nuevo grupo, integrado por miembros de los otros grupos. Refuerzan la idea del 100 % de los puertos y de las diversas formas de caracterizarlos; se destaca la importancia en cada caso. En este esquema, se debe privilegiar las habilidades comunicativas, pues se preparará la presentación. Sugérelas usar aproximaciones a porcentajes conocidos o fracciones de uso común.

Cada estudiante presenta lo que averiguó en sus grupos originales y la forma en la que lo trabajó. En el nuevo grupo, debe organizar su presentación con algún matiz particular. Por ejemplo, se puede enfatizar los puertos de la región, los puertos cercanos o los que están camino a la localidad, etc.

Se debe pedir a los estudiantes que expresen los datos en porcentajes y mediante expresiones decimales, para que se familiaricen con las diversas representaciones de los números. A partir de ello, los estudiantes organizarán la información y la representan en gráficos o tablas. Asimismo, ensayarán sus presentaciones por grupos y, luego, en plenaria en todo el salón. Finalmente, se establece una ronda de preguntas y se cierra la presentación pegando los papelotes trabajados.

**Posibles variaciones o extensión:**

- Pedir que caractericen los puertos de una zona específica, utilizando porcentajes.
- Pedir que calculen el porcentaje de los distintos tipos de embarcaciones que circulan por un determinado puerto durante un período.

**5. Posible estrategia de solución**

Establecimiento del 100% de puertos peruanos.

Se puede considerar como el total de puertos aquellos que figuran en la imagen brindada, es decir, 26 puertos. Sin embargo, en realidad, son más los puertos peruanos. Tome en cuenta que el Callao es un solo puerto con varios terminales, y que el Puerto de Pisco estuvo cerrado temporalmente.

Clasificación por categoría y naturaleza del puerto

**Clasificación por categoría y naturaleza del puerto**

Categoría	Puertos		Cantidad
Mayor	Marítimo	Chimbote, Salaverry, Paita, Pisco (General San Martín), Matarani, Mollendo, San Nicolás, Callao, Talara, Ilo	10
	Fluvial	Pucallpa, Yurimaguas, Iquitos,	3
	Lacustre	Puno	1
Menor	Marítimo	Huarmey, Chancay, Supe, Huacho, Etén, Pacasmayo, San Juan de Marcona, Ático, Malabrigo (Chicama), Melchorita, Bayóvar	11
Caleta	Fluvial	Nauta	1
			26

Fuente: Instituto Nacional de Estadística e Informática - Dirección Nacional de Censos y Encuestas (s.a.).

**¿Cómo evaluar la presentación final?**

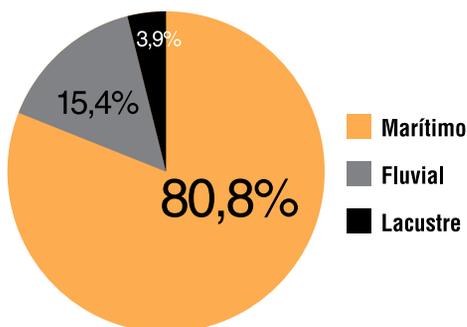
El puntaje total de esta parte del trabajo puede ser dividido en cuatro partes iguales, según los siguientes criterios:

- Presentación de tablas, cuadros, gráficos, etc., que sistematicen la información encontrada
- Presentación de alguna mejora al problema planteado
- Exposición del trabajo
- Respuestas a las preguntas planteadas o planteamiento de preguntas

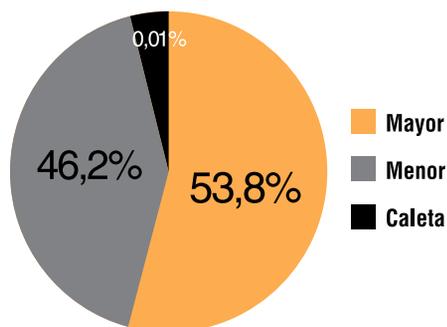
**Referencias en fracciones y porcentajes**

- La mitad (50%) de los 26 puertos es 13.
- La tercera parte (33%) de 26 puertos corresponde a 8,66.
- La cuarta parte (25%) de 26 puertos equivale a 6,5
- Tres cuartas partes (75%) de 26 puertos es 19,5.

Tipos de puertos peruanos por su naturaleza

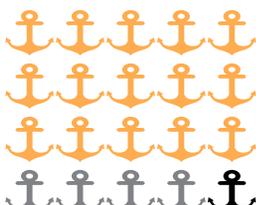


Puertos peruanos según categoría



- Más de las tres cuartas partes de los puertos del Perú son marítimos o se hallan en la costa.
- Un poco más de la mitad de los puertos peruanos tiene la categoría de puerto mayor; es decir, se dedican a la importación y exportación de productos.

**Puertos peruanos por su naturaleza**



Una representación de forma discreta que aplica truncamiento a las expresiones decimales podría ser la mostrada a la izquierda. En esta representación, podríamos decir que –aproximadamente– un veinteavo del total corresponde a los puertos lacustres; y cuatro quintos del total, conforman los puertos marítimos.

**Rúbricas de evaluación de todo el proceso**

	Trabajo individual		
	Insuficiente (4 puntos)	Bueno (6 puntos)	Excelente (8 puntos)
Participación	Irregular y por sugerencia.	Esporádica y por iniciativa propia.	Siempre y por iniciativa propia.
Recepción de ideas	No las respeta.	Las valora.	Las integra.
Solución de problemas	No se involucra.	Se interesa, pero no participa.	Se interesa y aporta.

	Trabajo grupal		
	Insuficiente (2 puntos)	Bueno (3 puntos)	Excelente (4 puntos)
Organización	No se presenta o hay roles que no se cumplen.	Se presentan roles que se cumplen.	Se presentan roles y se cumplen.
Comprensión de la tarea	Trabajan y en el proceso tienen dudas iniciales.	Preguntan al inicio y en el proceso de ejecución.	Preguntan siempre antes de la ejecución de la tarea.
Ejecución	Ensayan procedimientos sin planificar.	Establecen pasos que cambian drásticamente en la ejecución.	Establecen pasos que se perfeccionan durante la ejecución.
Presentación	Exposición desestructurada.	Exposición parcialmente estructurada	Exposición claramente estructurada.

**Evaluación sugerida**

*Es importante que cada grupo adquiera autonomía para valorar los procesos vividos. Por ello, se recomienda que se apliquen los instrumentos de evaluación en cada grupo y que, luego, esa información pueda ser presentada al docente.*

- Para el trabajo individual, se sugiere que cada estudiante pueda autoevaluar-se y que, después, sea evaluado por un compañero al azar.
- Para el trabajo grupal, se debe evaluar a todos los integrantes.

# SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Estimación y cálculo del asfalto

Tiempo: 60 minutos

## 1. Contexto estímulo

Mediante el proceso de destilación fraccionada del petróleo, se obtienen derivados como el asfalto. Este es un material usado en la construcción de carreteras y autopistas.

## 2. Tarea propuesta

Calcular el área por asfaltar de las pistas que se encuentran alrededor del óvalo de la Marina, en la ciudad de Trujillo, y de una ampliación de un carril para los vehículos que transitan por dicho óvalo (debido al crecimiento poblacional).

## 3. Planificación

Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. De igual modo, pueden extraer información relevante a partir de una única fuente y hacer uso de un solo modo de representación. A su vez, utilizan algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicos. También, son capaces de realizar razonamientos directos e interpretaciones literales de sus resultados.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes representan matemáticamente una situación del mundo real y la justifican.
- Los estudiantes calculan áreas de figuras complejas mediante estrategias de descomposición de figuras. Además, explican la solución al problema en relación con la situación original.

### 3.2. Materiales

- Se utilizará una computadora por grupo con acceso a Google Maps o Google Earth. En caso de no contar con una, use una fotografía que incluya la escala de la misma. Para la segunda situación, se pedirá la propuesta de ampliación de un carril.
- Se empleará un esquema de organizador gráfico, preferentemente, un diagrama de flujo, sobre el proceso que se debe seguir. Es posible que también entregue las piezas o un esquema en blanco que, después, será completado por cada grupo.
- Calculadora

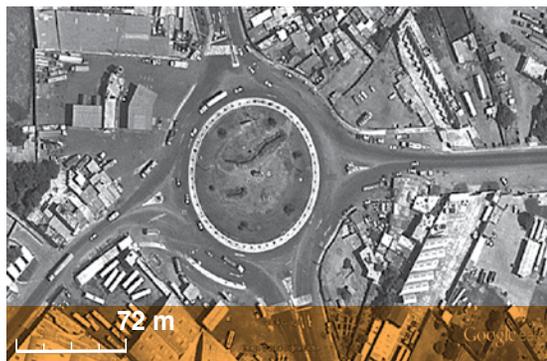


Figura 1. Vista aérea obtenida con Google Earth

## Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Actúa y piensa en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.  
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización.

### Indicador de las Rutas del Aprendizaje

Reconoce relaciones no explícitas entre datos de dos magnitudes en situaciones de variación, y expresa modelos referidos a proporcionalidad inversa, funciones lineales y lineales afines.

Calcula el perímetro y área de figuras poligonales regulares y compuestas, triángulos, círculos componiendo y descomponiendo en otras figuras cuyas medidas son conocidas, con recursos gráficos y otros.

### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización

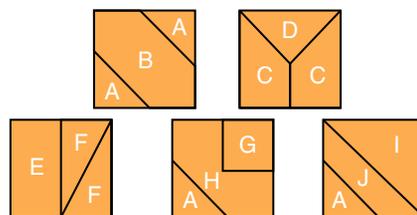
Diseña y ejecuta un plan orientado a la investigación y resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos y distancias en mapas, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; rotar, ampliar, reducir formas o teselar un plano, con apoyo de diversos recursos.

### Estándar del nivel VI Regularidad, equivalencia y cambio

Usa terminologías, reglas y convenciones al expresar su comprensión sobre propiedades y relaciones matemáticas referidas a: progresiones aritméticas, ecuaciones lineales, desigualdades, relaciones de proporcionalidad inversa, función lineal y afín.

### 3.3. Organización del aula

Forme grupos de tres estudiantes. Si su interés es mezclar y probar con nuevos grupos, puede utilizar la técnica del rompecabezas. Para realizarla, sírvase de piezas como las que se muestran.



Para ello, prepare con anticipación las piezas. Luego, combínelas y entregue una a cada estudiante. Los grupos se formarán con los integrantes que tengan las piezas que formen alguno de los cuadrados mostrados.

### 4. Procedimiento que debe seguir...

#### Inicio:

Los grupos reconocen la situación, la exploran y la relacionan con la tarea. Luego, empieza la planificación de la solución y las acciones a realizar.

Los estudiantes se organizarán en grupos. Usted presentará o entregará la fotografía mostrada al inicio de la actividad, e indicará la tarea a realizar.

Proporcione un tiempo para que los estudiantes planteen ideas acerca de cómo abordar la tarea. Para ello, puede utilizar las siguientes preguntas: “¿Cuáles son las medidas pertinentes y cómo obtenerlas?”, “¿Qué recursos tenemos?”, “¿Cómo solucionamos la ausencia de uno u otro recurso?”, y “¿Qué opciones habría para la ampliación del carril?”. Registre las ideas en la pizarra en dos columnas: una para los procesos y otra para los productos. Si lo considera pertinente, aumente una columna para los recursos necesarios.

En grupo abierto, debe anotar las ideas y presentar o empezar a dibujar el diagrama de flujo. Mencione que empezarán a ordenar las acciones a realizar.

Coloque los textos en los primeros casilleros y permita que los estudiantes completen esta labor. De forma paralela, coloque los productos parciales que, en concreto, se podrán ir obteniendo.

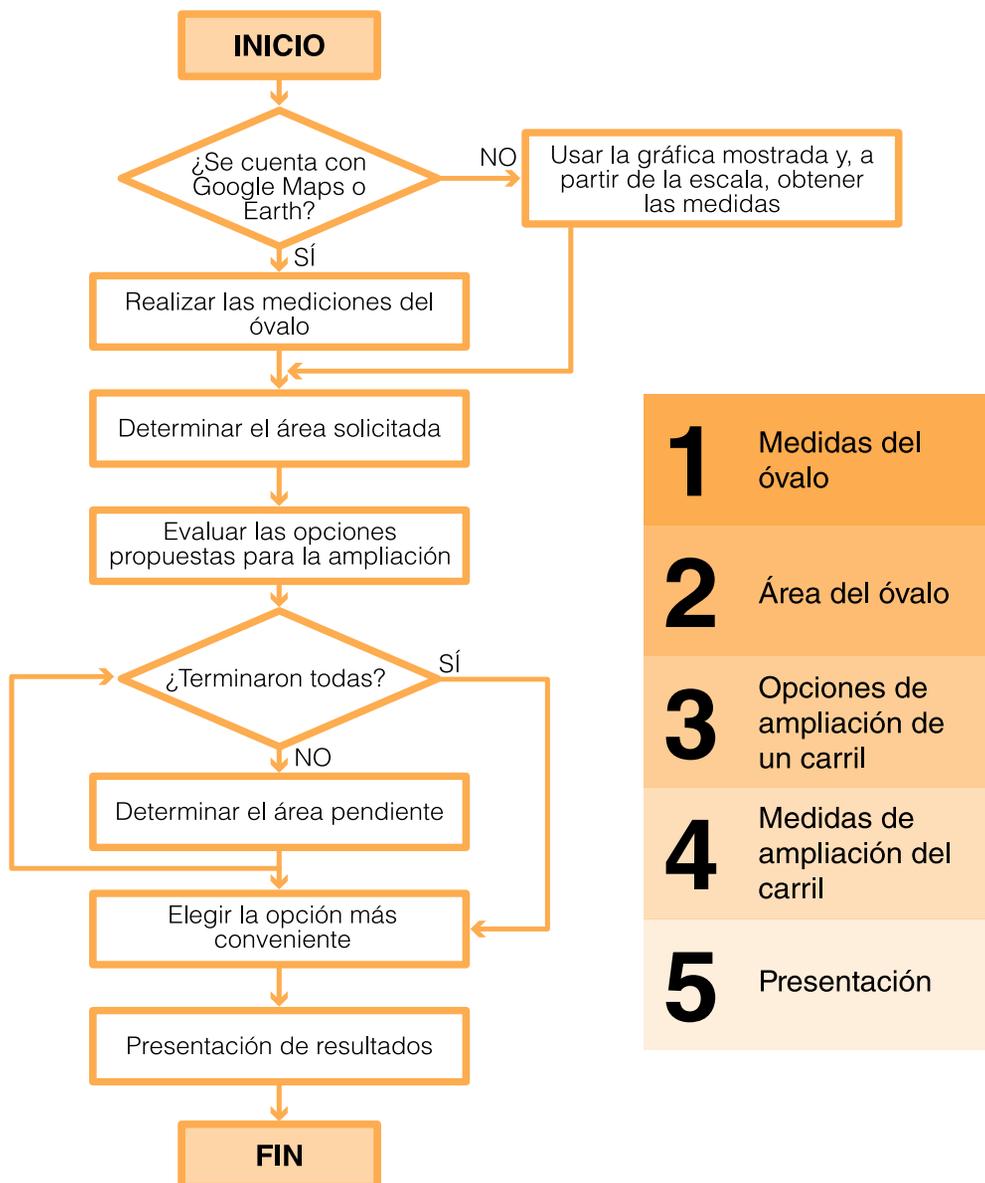
La observación de la forma como se organizan un proceso de solución, así como los productos que se obtendrán, le servirá de base al estudiante para continuar haciéndolo por su cuenta. A continuación, colocamos un modelo de ejemplo:

#### Ventajas de planificar

- Tener proyectada una ruta que permita optimizar procesos, que eviten el ensayo-error sin criterio
- Establecer una estrategia de desarrollo que posibilite simplificar el trabajo (dividir por partes, etc.) y tener más probabilidad de logro
- Desarrollar la capacidad de abstracción de los estudiantes, con anticipación ante posibles escenarios

#### Información para el docente

- Medición de distancias y áreas con Google Earth, software que se descarga de forma gratuita y, según la versión usada, brinda acceso a diversas mediciones:
  - Medición de la longitud en la Tierra con una línea o ruta (todas las versiones)
  - Medición de una circunferencia o un área con un polígono o un círculo (solo Google Earth Pro & CE)
  - Medición de los edificios en 3D con una ruta o polígono (solo Google Earth Pro & EC)
- Medición de distancias y áreas con Google Maps. Para ver la distancia entre puntos, use el menú del botón derecho del ratón. Haga clic en el punto de partida y luego en medir la distancia, haciendo clic en cualquier punto del mapa. Puede añadir puntos adicionales si se requiere.



Después de elegir el carril de ampliación, los estudiantes deben calcular la cantidad de metros cuadrados de asfalto que le correspondería al nuevo carril en cada una de las opciones.

#### Cierre:

Los grupos comparten el trabajo realizado con miras a mejorar constantemente.

Los estudiantes presentarán los procedimientos seguidos y los resultados de cada grupo; el resto los irá revisando. Además, se determinará al azar dos grupos para que presenten su trabajo.

#### Evaluación sugerida

*Criterios para evaluar el diagrama de flujo:*

- Uso correcto de los íconos
- Secuencia lógica de desarrollo
- Presentación de todos los procesos
- Originalidad de la estrategia presentada

## 5. Posible estrategia de solución

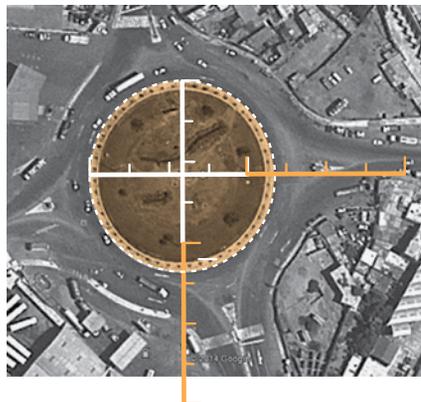
### Solución a partir de la imagen presentada

Se observa que, en la parte inferior de la foto, hay una escala gráfica que representa 72 m. Esta escala se presenta de la siguiente manera:



Cada división de la escala gráfica indica que es la cuarta parte de 72 m, es decir, 18 m.

Mediante la escala gráfica, se mide el óvalo. Ello se lleva a cabo colocando la escala gráfica sobre el óvalo y realizando una medición aproximada de esta. Es posible suponer que es circular y podemos comprobarlo a partir de las mediciones de “dos diámetros” perpendiculares. Luego, se observa que es circular.



La medida del diámetro del óvalo –incluida la vereda– es una escala gráfica completa y tres cuartas partes de 18 m, es decir:

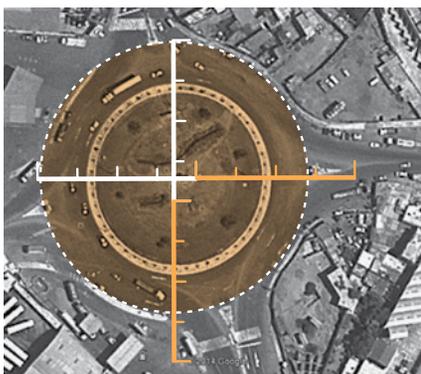
Diámetro interno:  $72 \text{ m} + 13,5 \text{ m} = 85,5 \text{ m}$

Radio interno:  $42,75 \text{ m}$

Para calcular el área por asfaltar alrededor del óvalo, medimos el óvalo tomando en cuenta la pista. A continuación, se presenta el diámetro de ese caso:

Diámetro externo:  $72 \text{ m} + 35 \text{ m} = 107 \text{ m}$

Radio externo:  $53,50 \text{ m}$



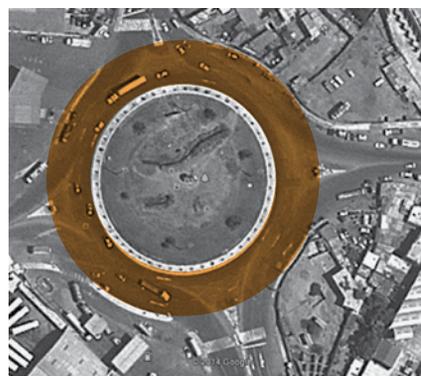
Calculamos el área de la corona circular en metros cuadrados:

$$\begin{aligned} \pi(53,50)^2 - \pi(42,75)^2 &= \pi(53,50^2 - 42,75^2) \\ &= \pi(53,50 + 42,75)(53,50 - 42,75) \\ &= \pi(96,25)(10,75) \\ &= \pi(1\,034,6875) \end{aligned}$$

Si consideramos a  $\pi$  como 3, tenemos:

$$= 3(1\,034,6875) = 3\,104,0625 \approx 3\,104 \text{ m}^2 \text{ de pistas.}$$

Es importante destacar que las mediciones de los respectivos diámetros y radios se pueden realizar directamente con las herramientas de Google Earth o Maps.



Calcularemos el área de asfalto por cubrir para construir un carril adicional, destinado a los autos que circulan por el óvalo.

Como no se especifica cómo será este carril (y se indica que pasará por los alrededores del óvalo), se pueden realizar diversos planteamientos. Uno de ellos, el más sencillo, es aumentar un carril a la pista que se acaba de asfaltar. Para hacerlo, averiguamos el tamaño posible del carril y, en función de ello, calculamos el área de una nueva corona circular.

Ancho de la pista recién asfaltada: 10,75 m.

Como el ancho es uniforme y no debe ser inferior a 3, 50 m, se deben haber asfaltado 3 carriles.

Cada carril presenta:

$10,75 \div 3 = 3,58$  m: este será el ancho de un carril adicional, lo que equivale a agregar ese valor al radio.

Calcularemos el área de la corona circular en metros cuadrados:

$$\begin{aligned} \pi(57,08)^2 - \pi(53,50)^2 &= \pi(57,08^2 - 53,50^2) \\ &= \pi(110,58)(3,58) \\ &= \pi(395,8764) \end{aligned}$$

Si  $\pi = 3$ , tenemos:  $1187,6292 \approx 1\ 188$  metros cuadrados.

Es posible averiguar los planes que existen para la modificación del óvalo y, en función de ello, realizar los cálculos más reales y que sigan los planes para la ciudad.

2

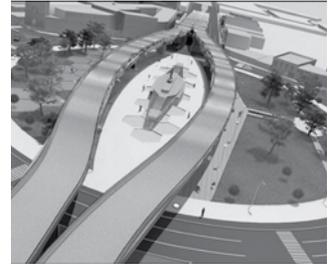
### Instrumento de evaluación

	Coevaluación (escribe los nombres de los evaluados)		
	_____	_____	_____
Identificación de la tarea			
Manejo de instrumentos TIC o mecánicos			
Precisión de resultados			
Argumentos			
Originalidad de presentación			

Este instrumento debe ser aplicado por un representante de cada grupo al resto de grupos.

### Información para el docente

- Ancho usual de pistas: 3, 50 m o 3, 75 m (en carreteras)



### Evaluación sugerida

- Criterios para evaluar el cálculo de las áreas:*
- Identificación y delimitación de las pistas pertenecientes al óvalo
  - Obtención de las medidas pertinentes del óvalo de la Marina
  - Cálculos adecuados del área de asfalto de las pistas que rodean al óvalo
  - La cantidad de opciones encontradas
  - La justificación de la elección del área que se necesita asfaltar para cumplir con la tarea propuesta.

# TERCER GRADO DE SECUNDARIA

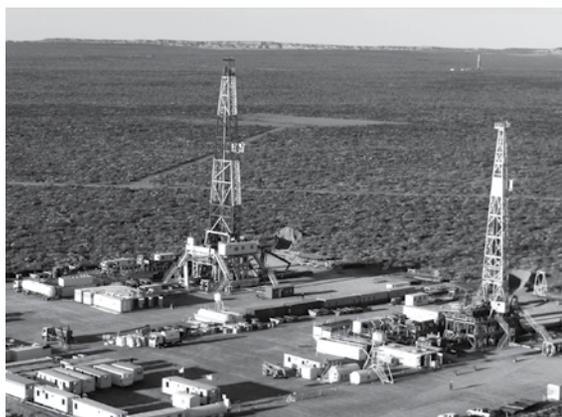
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Producción y consumo de petróleo

Tiempo: 135 minutos

## 1. Contexto estímulo

El petróleo es el principal recurso energético usado en la actualidad. Existe solo en algunas partes del mundo, de las cuales se extrae mediante excavaciones, y se transporta para procesarlo. Así, se obtienen derivados como la gasolina.

Algunas veces, en el transporte, se producen fallas que ocasionan derrames. Estas perjudican la fauna y el suelo con efectos de larga duración.



## 2. Tarea propuesta

Los estudiantes realizarán lo siguiente:

- Describir estadísticamente diversos aspectos relacionados con el petróleo a nivel mundial, regional u otros en las últimas décadas, a partir de información presentada
- Graficar y calcular las medidas de tendencia central (como el promedio, la moda o la mediana), según sean aplicables a la información estadística encontrada o presentada
- Elaborar un artículo acerca de cuáles son los principales países productores y consumidores de petróleo, a partir de información elaborada

## 3. Planificación

Los estudiantes pueden ejecutar procedimientos expresados claramente, incluyendo aquellos que demandan una secuencia de decisiones. Además, pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución a problemas sencillos; interpretar y utilizar representaciones a partir de diferentes fuentes de información; y razonar directamente a partir de ellas. Son, también, capaces de elaborar breves escritos, en los que exponen sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes elaboran representaciones gráficas estadísticas y calculan las medidas de tendencia central de un grupo de datos.
- Los estudiantes analizan información de los medios referida al tema, sobre el cual argumentan con datos estadísticos.

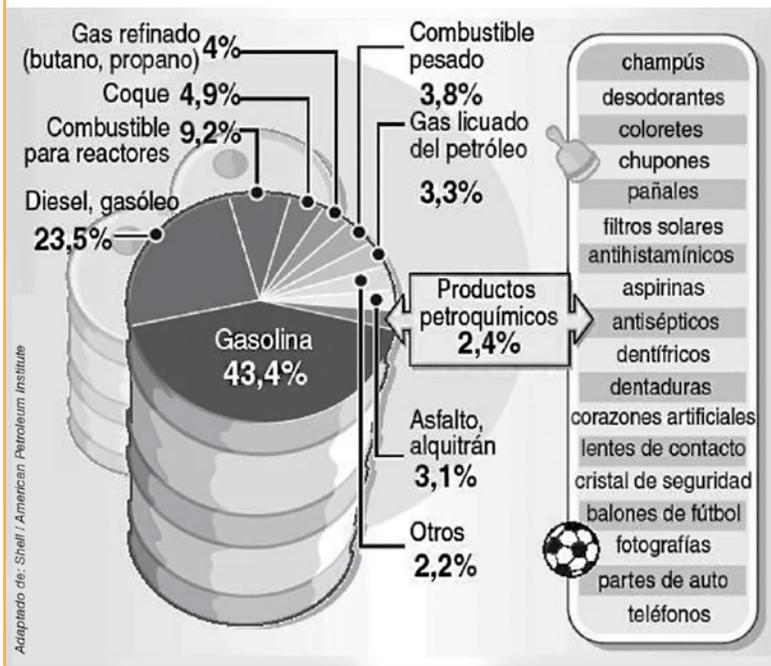
### 3.2. Materiales

Tablas o gráficos estadísticos referidos a producción, consumo, precios y otros sobre el petróleo. Deben estar lo más actualizado posible.

### Alineación con documentos curriculares peruanos

<b>Competencia</b> <i>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre</i>	<b>Indicador de las Rutas del Aprendizaje</b> <i>Organiza datos en variables cualitativa (ordinal y nominal) y cuantitativas provenientes de variadas fuentes de información de una muestra representativa, en un modelo basado en gráficos estadísticos.</i>
	<b>Estándar del nivel VII Gestión de datos e incertidumbre</b> <i>Interpreta y plantea relaciones entre datos provenientes de diferentes fuentes de información, referidas a situaciones que demandan caracterizar un conjunto de datos, y los expresa mediante variables cualitativas o cuantitativas, desviación estándar, medidas de localización y la probabilidad de eventos.</i>

## PRODUCTOS OBTENIDOS DEL PETRÓLEO (Diagrama circular en infografía)



### Información para el docente

- Actualmente, la ciencia y la tecnología forman parte de la vida y determinan beneficios y limitaciones para distintos sectores.
- Conocer una actividad económica como la petrolera invita a que los estudiantes tengan la opción de construir sus opiniones y participación sobre la base de información estadística que les sirva de argumento.
- Aspectos de la actividad petrolera por resaltar
  - Productores de petróleo
  - Precios de venta
  - Cantidad de producción
  - Beneficios que aporta y a quiénes les aporta
  - Perjuicios que ocasiona y a quiénes se lo ocasionan



El Parque Nacional de Virunga es mundialmente conocido por su rica vida salvaje, pero es mucho más que eso. Virunga es también una fuente de recursos vital para la población que vive alrededor del parque nacional más antiguo de África. WWF lanza un llamamiento urgente a gobiernos, compañías petrolíferas y ONG —de conservación, derechos humanos o desarrollo— para que se tomen medidas inmediatas que protejan al parque de las exploraciones petrolíferas.

# PETRÓLEO EN EL PARAÍSO



Virunga es Patrimonio de la Humanidad de la UNESCO, y es conocido por sus ecosistemas ricos en vida salvaje: una red de bosques, sabanas, ríos, lagos, marismas, volcanes activos e inactivos y glaciares permanentes.

## LA MALDICIÓN DEL PETRÓLEO

La historia de los países productores de petróleo demuestra que más que reducir la pobreza y la desigualdad, el petróleo tiene consecuencias sociales y económicas negativas y en muchos casos alimenta conflictos. 3 procesos son responsables de la "maldición" de este recurso natural:

1. La EXPORTACIÓN de petróleo hace que la moneda local aumente su valor (se aprecie), haciendo menos competitivos a otros sectores exportadores.
2. El PRECIO del petróleo fluctúa, lo que provoca beneficios impredecibles que causan serias disrupciones económicas, lo que complica la planificación a largo plazo.
3. Los BENEFICIOS del petróleo aumentan el valor de estar en el poder, y dan a los políticos más recursos para influir en los resultados electorales, lo que aumenta los niveles de corrupción.

## SOCO

INTERNATIONAL PLC ES LA ÚNICA COMPAÑÍA PETROLÍFERA QUE HA INDICADO QUE BUSCARÁ PETRÓLEO EN VIRUNGA



## 186

HOGAR DE 186 GORILAS DE MONTANA



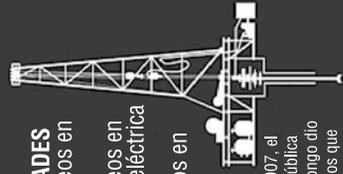
**OPORTUNIDADES**  
28 000 empleos en pesca

**10 000** empleos en energía hidroeléctrica

**7 420** empleos en turismo

**85%**

En diciembre de 2007, el gobierno de la República Democrática del Congo dio permisos petrolíferos que cubren el 85% del parque.



## PETRÓLEO

SU EXPLOTACIÓN PONDRIA EN PELIGRO EL STATUS DE PATRIMONIO NACIONAL DE LA HUMANIDAD DEL PN VIRUNGA



## Biodiversidad del Parque Nacional Virunga

	<b>218</b>	+	<b>706</b>	+	<b>78</b>	+	<b>109</b>	Reptiles
Mamíferos			Aves		Amfibios			

## VALOR ECONÓMICO Y SOCIAL

El valor económico total del ecosistema de Virunga es de aprox 50 millones de dólares al año. Si se solucionan los retos actuales, el valor potencial del parque podría llegar a 1100 millones de dólares anuales.



## PESCA

La pesca en los lagos de Virunga genera 30 millones de dólares al año. La mala gestión ha llevado a la sobrepesca.

Introduciendo sistema de gestión sostenible, la pesca total podría triplicarse, elevando los ingresos hasta los 90 millones de dólares y aumentando las oportunidades de empleo.



## TURISMO

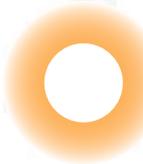
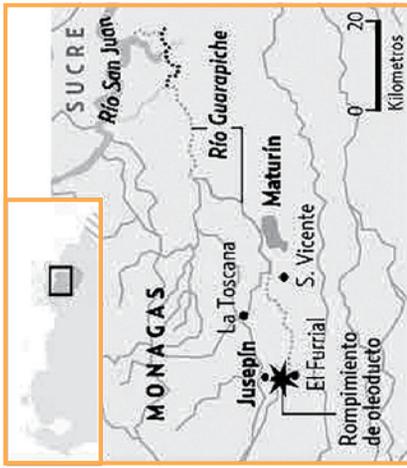
Virunga está cerrado al turismo por motivos de seguridad desde setiembre de 2012, aunque los visitantes solían ser una fuente valiosa de ingresos. El valor potencial del turismo en el futuro es de 235 millones de dólares anuales, también con nuevas oportunidades de empleo.



## ENERGÍA HIDROELÉCTRICA

El acceso a la energía produce beneficios substanciales para la erradicación de la pobreza. La estación Mutwanga, que usa agua de Virunga, da electricidad a 10 000 personas. El valor potencial de nuevas centrales es de más de 10 millones de dólares al año, con nuevas oportunidades de trabajo para la población local.

# EFFECTOS EN EL ECOSISTEMA

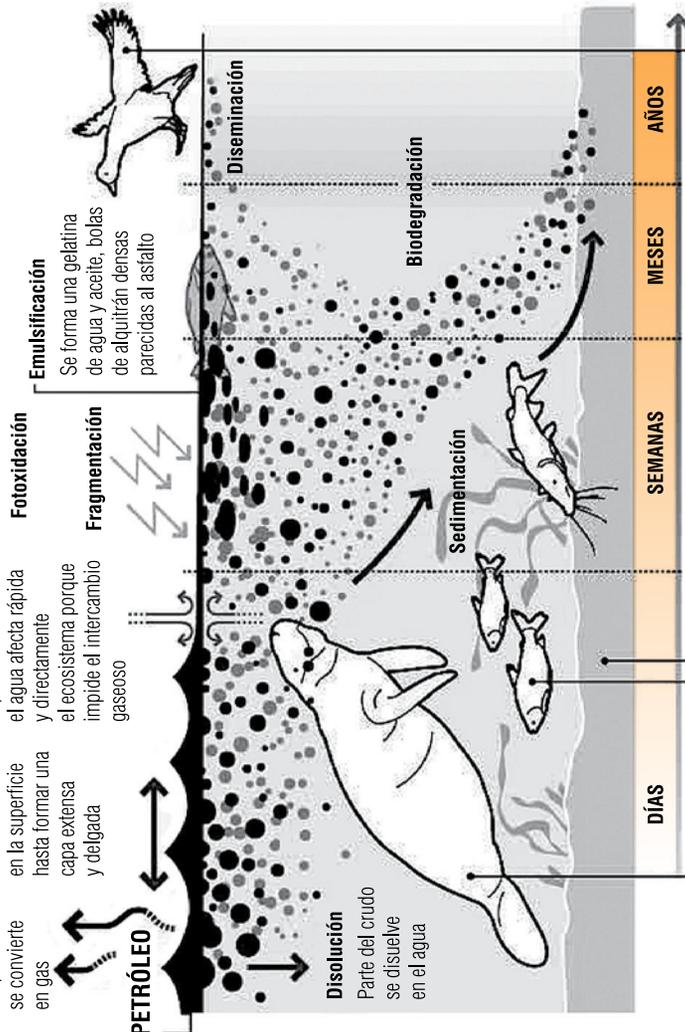


## EVOLUCIÓN DEL DERRAME EN EL AGUA

**Evaporación**  
Una gran parte del petróleo se convierte en gas

**Dispersión**  
La mancha de aceite se extiende en la superficie hasta formar una capa extensa y delgada

**Bloqueo**  
La película impermeable sobre el agua afecta rápidamente el ecosistema porque impide el intercambio gaseoso



## FLORA Y FAUNA



- Muerte por asfixia y envenenamiento por absorción, contacto y exposición a los componentes tóxicos del petróleo solubles en agua
- Aumento de infecciones en las especies por absorción de cantidades subletales de petróleo
- Destrucción de fuentes alimenticias de especies superiores
- Incorporación de carcinógenos a la cadena alimentaria

## HABITANTES DEL RÍO GUARAPICHE

El petróleo cubre la piel de mamíferos acuáticos como las **nutrias** y **manatíes**

## Los bagres, cachamas, curvinas y róbalos

son afectados por los componentes químicos disueltos en el agua que interfieren con el intercambio entre los seres vivos, afectan las reacciones nerviosas para escapar de otros animales, la reproducción y la alimentación

Después de varias horas el petróleo llega al fondo del río donde viven especies botánicas y organismos que mueren asfixiados

Los derrames petroleros afectan dramáticamente a las aves que se alimentan en el agua. El petróleo se adhiere a sus plumas y altera el balance térmico del animal que muere por hipotermia, envenenamiento estres o shock

## PRODUCCIÓN TOTAL DE PETRÓLEO (miles de barriles por día)

Ranking		2008	2009	2010	2011	2012
1.	Arabia Saudita	10 782	9 757	10 522	11 154	11 546
2.	Estados Unidos	8 564	9 133	9 692	10 136	11 096
3.	Rusia	9 797	9 934	10 157	10 239	10 397
4.	China	4 037	4 068	4 363	4 347	4 416
5.	Canadá	3 344	3 319	3 442	3 597	3 868
6.	Irán	4 178	4 178	4 243	4 226	3 538
7.	Emiratos Árabes Unidos	3 047	2 795	2 813	3 088	3 213
8.	Irak	2 385	2 399	2 403	2 629	2 987
9.	México	3 184	3 001	2 979	2 960	2 936
10.	Kuwait	2 728	2 506	2 460	2 692	2 797
11.	Brasil	2 431	2 562	2 712	2 685	2 652
12.	Nigeria	2 169	2 212	2 459	2 554	2 524
13.	Venezuela	2 656	2 510	2 405	2 489	2 489
14.	Noruega	2 464	2 353	2 135	2 007	1 902
15.	Argelia	1 954	1 910	1 881	1 863	1 875
26.	Argentina	801	802	791	764	739

Fuente: US Energy Information Administration

### 3.3. Organización del aula

Dinámica de trabajo: **Grupos de conversación y debate**

El objetivo de esta actividad es generar discusiones entre grupos de estudiantes acerca de un tema o área en especial. El docente puede introducir el tema brevemente y presentar algunas preguntas motivadoras. Estas nos pueden mostrar las creencias o conocimientos de los estudiantes.

- ¿Ustedes emplean objetos que requieren del petróleo para su fabricación? ¿Cuáles?
- ¿Qué beneficios trae a un país producir petróleo?
- ¿Qué problemas produce la explotación de petróleo?

#### Primera fase

Los estudiantes forman parejas y eligen una de las preguntas para ser respondida brevemente. Verifique que cada una de las tres opciones haya sido escogida al menos por un grupo.

#### Segunda fase

Se juntan dos o tres parejas que hayan elegido la misma pregunta. De este modo, se forma un equipo y los estudiantes comparten sus respuestas. Luego, con esa temática, se debe realizar la tarea propuesta.

#### Presentación de la tarea

Presente la tarea a todos los grupos. Indique que cada grupo representa a un asesor del Ministro de Economía del país. Los grupos deben escoger entre la idea de que el país explote o no sus reservas de petróleo. Para ello, deben argumentar con información relacionada con su tema. Los productos finales se presentarán en un debate abierto, en el que se decidirá si el país explota o no sus reservas.

### 4. Procedimiento que debe seguir...

#### Inicio:

El estudiante se familiariza con el tema de la actividad y se prepara para planificar las acciones a realizar.

Los estudiantes ya se encuentran organizados en grupos. Luego, usted genera el recuerdo de los gráficos estadísticos que ya han trabajado en años anteriores o que han visto en los medios en los últimos tiempos. Permita que los estudiantes den los nombres y usted empiece a organizarlos en la pizarra, como en una lluvia de ideas. Recuerde tener en cuenta su vocabulario, aunque esté errado. Ese es el punto de partida: valorar un conocimiento o información para de él partir y desarrollar las competencias matemáticas.

Oriente la reflexión hacia el tipo de información que se podría representar con esos gráficos. De esta forma, recordará la variable cualitativa, la cuantitativa, etc. Finalmente, indague sobre cuáles son más fáciles de entender, más atractivos, etc. Esta parte se realiza en función de lo que se desee investigar. La lluvia de ideas al final puede aparecer organizada con recursos (gráficos) y estrategias (para su construcción o sobre lo que representan).

#### Criterios para orientar el trabajo en equipo hacia el éxito

*Puede considerar lo siguiente:*

- Todos los estudiantes deben ser capaces de explicar y sustentar su propuesta, tanto en el equipo como en el debate final.*
- Se espera participación, crítica, revisión y elaboración activa de la respuesta.*
- Se esperan productos atractivos visualmente, con adecuada información y fundamentación numérica.*
- Se sugiere realizar la presentación con el empleo de recursos tecnológicos.*

**Proceso:**

Los estudiantes ejecutan el plan previamente trazado, introduciendo correcciones en el mismo para mejorar la planificación y, con ello, el proceso.

Se dialogará sobre la importancia de los recursos energéticos en la vida y su impacto en el medio ambiente. Se debe hacer énfasis en el petróleo y demás combustibles fósiles.

Entregue información para que los estudiantes determinen el tipo de gráfico estadístico recomendable para comunicar dicha información. Después, desarrollarán, con ayuda o no, de TIC. De este modo, los estudiantes calcularán una medida representativa de la información trabajada.

Posteriormente, elaborarán un texto para la presentación al Ministro. Para ello, utilizarán la información procesada con respecto a la explotación o no de los recursos petroleros.

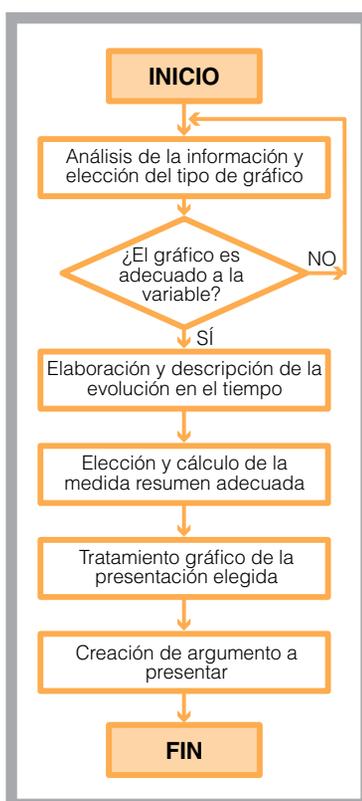
Una forma de presentar el proceso y de contribuir con el seguimiento del proceso por parte de los estudiantes es hacerlo mediante un diagrama de flujo, como el que mostramos a la derecha.

Este diagrama puede ser presentado por el docente, desarrollado en conjunto con los estudiantes. Otra opción es que solo sea sugerido y que los estudiantes lo elaboren de manera individual. Esto puede realizarse si ya han adquirido experiencia en ellos.

**Cierre:**

El objetivo es consolidar los aprendizajes esperados, en un proceso que aprecie las distintas formas de desarrollo grupal de las tareas.

En grupo-clase, todos los grupos expondrán su decisión (por elección al azar) y la argumentan en función de la información encontrada y profundizada. Además, presentarán por escrito un resumen. Finalmente, debatirán y llegarán a acuerdos.

**Importancia de planificar**

- Tener proyectada una ruta que permita optimizar procesos, que eviten el ensayo-error sin criterio
- Establecer una estrategia de desarrollo que posibilite simplificar el trabajo (dividir por partes, etc.) y tener más probabilidad de logro
- Desarrollar la capacidad de abstracción de los estudiantes, con anticipación ante posibles escenarios

**Criterios para revisar el diagrama de flujo**

- Uso correcto de los íconos
- Secuencia lógica de desarrollo
- Presentación de todos los procesos
- Originalidad de la estrategia presentada

**Evaluación sugerida**

Los criterios para evaluar los resultados podrían ser los siguientes:

- Procedimientos efectivos de desarrollo de la tarea
- Pertinencia en la determinación de los gráficos estadísticos
- Descripción de la evolución histórica, en forma independiente o interrelacionada
- Comprensión y cálculo correcto del promedio
- Análisis de la información en función de la sustentación ante el Ministro

# TERCER GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: Capacidades y modelos cilíndricos

Tiempo: 120 minutos

## 1. Contexto estímulo

En el comercio del petróleo, usualmente, el barril es la unidad de medida estándar. Está vigente desde la época colonial inglesa y equivale a 42 galones (aprox. 159 litros).

## 2. Tarea propuesta

Calcular las dimensiones de tres recipientes cilíndricos diferentes con la capacidad estándar de un barril. Luego, se debe determinar la capacidad y la masa respectiva del petróleo transportado por un camión.



## 3. Planificación

Los estudiantes pueden trabajar con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que conllevan condicionantes o exigen la formulación de supuestos. Asimismo, pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones –incluidas las simbólicas–, y asociarlas directamente con situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. De igual modo, pueden elaborar y comunicar explicaciones basadas en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes representan matemáticamente una situación real que involucra los volúmenes y pesos, y realizan el análisis de ellas.
- Los estudiantes interpretan la idea de densidad (fluido), y diseñan estrategias para el cálculo de masa o volumen con conversión de unidades.
- Los estudiantes explican la solución matemática del problema, y la relacionan con la situación de partida

### 3.2. Materiales

- Imagen de un barril de petróleo
- Imagen de un camión de transporte de petróleo
- Hojas para elaborar un organizador gráfico que muestre las actividades a seguir o las relaciones entre ellas
- Calculadora, para agilizar las cuentas, si lo considera necesario

### 3.3. Organización del aula

Forme parejas de trabajo, de preferencia, por afinidad entre los estudiantes.

## Alineación con documentos curriculares peruanos

Competencia  
Forma, movimiento y localización/ Regularidad, equivalencia y cambio argumenta

### Indicador de las Rutas del Aprendizaje

Relaciona elementos y propiedades de cuerpos a partir de fuente de información, y los expresa en modelos basados en prismas y cuerpos de revolución.

Evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación.

### Estándar del nivel VIII Forma, movimiento y localización

Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas, procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; establecer relaciones de inclusión entre clases para clasificar formas geométricas; con apoyo de diversos recursos.

### Estándar del nivel VII Regularidad, equivalencia y cambio

Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos para generalizar la regla de formación de progresiones aritméticas y geométricas, hallar la suma de sus términos, simplificar expresiones usando identidades algebraicas y establecer equivalencias entre magnitudes derivadas; con apoyo de diversos recursos.

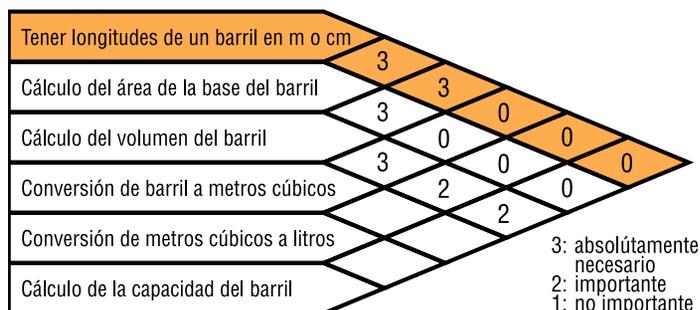
#### 4. Procedimiento que debe seguir...

##### Inicio:

Las parejas de estudiantes recuerdan lo que conocen o estiman sobre las medidas de un barril de la capacidad indicada, y lo relacionan con la tarea planteada.

Primero, utilice la foto de un barril o su dibujo y, a partir de la imagen, solicite que las parejas indiquen todas las actividades necesarias para conocer las medidas que puede tener el barril. Posteriormente, indique que seleccionen las actividades que serán necesarias para conocer la capacidad de un barril de petróleo.

Luego, pida a los estudiantes que organicen las ideas en un esquema de forma libre o una gráfica de relaciones entre actividades, que permita señalar la importancia de una determinada relación de actividades. Observe el ejemplo elaborado por un grupo para analizar el tránsito de las longitudes hacia la capacidad (modelo que sigue el proceso de aprendizaje típico):



##### En este caso, los estudiantes indican...

En la fila gris (33000): Conocer las longitudes de un barril es absolutamente necesario para calcular el área de la base y el volumen de un barril; así, se escribe 3 en la celda de cruce.

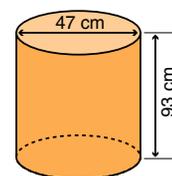
En la fila blanca (322): Calcular el volumen del barril es absolutamente necesario para la conversión a metros cúbicos, pero solo es importante para convertirlos a litros y saber su capacidad.

Considere que cada grupo puede realizar una organización totalmente distinta de sus actividades. Esto depende del punto de partida para la tarea, y las estrategias e interpretaciones que den a la información. Por ejemplo, un grupo podría empezar con la capacidad de un barril equivalente a 159 litros. Después, convierte esta medida a metros cúbicos y estima las dimensiones del barril de petróleo. Para ello, el grupo toma en cuenta la información que tiene sobre la fórmula del volumen del cilindro y opciones reales de la medida de un barril.

Terminada la primera parte de la tarea, se puede proceder de forma similar para identificar la capacidad y el peso de un tanque de petróleo. Para esto, se pueden realizar las siguientes posibles actividades: determinar la forma del tanque, calcular la capacidad del tanque de un camión, convertir de metros cúbicos a barriles y calcular el peso transportado.

#### Información para el docente

- La gráfica de relaciones:
  - Si los estudiantes no han experimentado la jerarquización de actividades, es recomendable que usted proporcione las actividades y que ellos solo se centren en jerarquizarlas.
  - Tome en cuenta que la valoración de 0 a 3 depende de las estrategias de resolución de cada pareja de trabajo y de la interpretación del barril como objeto o unidad de medida.
- El barril como unidad:
  - Es un estándar mundial con el cual la mayoría de países reporta sus cifras de producción, exportación, consumo, etc., de petróleo. Existen también referencias a su volumen en metros cúbicos o toneladas cuando se trata sobre su transporte.
  - Abreviatura: bbl
  - Medida en litros: 159 aprox.
  - Medida en metros cúbicos: 0,16
  - 1 tonelada de petróleo son 7,6 barriles
  - Dependiendo de la densidad del petróleo, la masa de un barril de petróleo está entre 119 kg y 151 kg.
- El barril como modelo físico:
  - En esta actividad, podría adoptar las siguientes medidas, si desea dar información a modo de ejemplo a los estudiantes.



**Proceso:**

Los estudiantes ejecutan el plan previamente trazado.

Con la información proporcionada (y, tal vez, otra información consultada por los estudiantes), se determinarán las dimensiones de tres recipientes cilíndricos diferentes. Todos ellos tienen una capacidad equivalente a un barril. Para esto, previamente, los estudiantes deben haber realizado la conversión a metros cúbicos. Sugiera que las medidas establecidas puedan implementarse para fines de comercialización, y que consideren datos reales de barriles del entorno.

Para la segunda parte, presente la fotografía del camión-tanque, junto con los siguientes datos: este tiene forma cilíndrica de 2,5 m de diámetro y 10 m de largo. Pida a los estudiantes que calculen el volumen de petróleo que puede contener dicho tanque. Su respuesta debe ser expresada en barriles.

Para llegar al cálculo del peso del petróleo contenido en un tanque lleno, debe precisar que la densidad del petróleo es de 0,8 g/ml. Oriente el desarrollo de la tarea a partir de la interpretación del concepto densidad. Por ejemplo, pregunte: “¿Qué significa que la densidad del petróleo tenga el valor mencionado?”.

**Cierre:**

Los grupos comparten el trabajo realizado con el objetivo de mejorar constantemente.

El objetivo es consolidar los aprendizajes esperados, y apreciar las distintas formas de desarrollo grupal de las tareas.

Todos los grupos presentan su proceso y resultados por escrito. Al menos dos de ellos, deben exponerlo frente a todo el grupo-clase.

**5. Posible estrategia de solución**

Cálculo de las dimensiones de la unidad “1 barril”

Se cuenta con los siguientes datos:

- Se establece como supuesto que el barril tendrá forma cilíndrica (cilindro recto).
- El volumen de un barril es 42 galones o 159 litros.
- El volumen de un cilindro se calcula a partir del radio ( $r$ ) y la altura ( $h$ ), con la fórmula:  $\pi r^2 h$
- Sabemos que  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$

Tomando en cuenta que  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$ , se hallará el volumen equivalente a 159 litros. A partir de ello, se estimará las dimensiones del barril de petróleo.

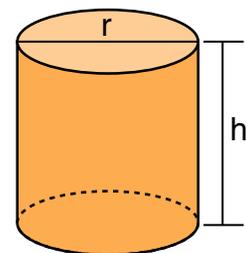
**Evaluación sugerida**

*Los criterios para evaluar el organizador:*

- *Coherencia de la estrategia seguida y de la priorización de actividades*
- *Justificación lógica*

*Los criterios para evaluar los resultados:*

- *Procedimientos o estrategia efectiva de desarrollo*
- *Pertinencia en la determinación de dimensiones de los cilindros*
- *Comprensión y uso adecuado de las equivalencias entre distintas unidades: barril,  $\text{m}^3$ , g/ml*
- *Relaciones claramente establecidas entre densidad, masa y volumen*
- *Exactitud de los cálculos realizados*



Como  $159 \text{ litros} = 159 \text{ dm}^3$ , (aplicando equivalencia) diremos que el volumen del barril de petróleo es  $159 \text{ dm}^3 = 159\,000 \text{ cm}^3 = 0,159 \text{ m}^3$ . Con ello, determinaremos las dimensiones posibles de un cilindro que tenga ese volumen, para lo cual se considerará la proporción de un cilindro convencional.

A continuación, presentamos un posible proceso de estimación de las medidas del cilindro a partir de las dimensiones de la base y la altura.

159 000 cm <sup>3</sup> ( $\pi r^2 h$ )			
Caso	Base ( $\pi r^2$ )	Altura (h)	Observaciones
1.	1 000 cm <sup>2</sup>	159 cm	Tendría la altura de una persona.
2.	3 000 cm <sup>2</sup>	53 cm	Sería bastante bajo, un poco más arriba de la rodilla.
3.	2 826 cm <sup>2</sup>	56,26 cm	Se consideró en la base 3,14 por 900. Luego, se dividió 159 000 entre 2 826. Aun así, el barril es muy bajo.
4.	1 413 cm <sup>2</sup>	112,5 cm	Se dividió entre 2 la base y se multiplicó por 2 la altura. Se ve razonable, aunque algo alto.
5.	1 884 cm <sup>2</sup>	84,39 cm	En el caso 3, se dividió la base entre 1,5 y se multiplicó la altura por 1,5. La altura es razonable, aunque algo baja.
6.	1 590 cm <sup>2</sup>	100 cm	Altura razonable.
7.	1 766,66 cm <sup>2</sup>	90 cm	Se dividió la base entre 9/10 y se multiplicó la altura por 9/10.

### Información para el docente

- Para que los estudiantes logren plantear más fácilmente las posibles medidas de un cilindro, pueden aplicar las propiedades de la inalterabilidad de la multiplicación.
- En función del dominio de las operaciones con decimales –de preferencia, realizadas con calculadora– puede variar la aproximación de  $\pi$  que se empleará. Así, es posible utilizar tres como aproximación.
- Es importante realizar la verificación del volumen, pues el uso de la raíz cuadrada y las aproximaciones lo pueden alejar del valor real.

Se consideran los casos 3, 6 y 7 para calcular las dimensiones y construir los respectivos gráficos.

Base:  $2\,826 \text{ cm}^2$

Cálculo del radio:

$$2\,826 = \pi r^2$$

$$2\,826 \div 3,14 = r^2$$

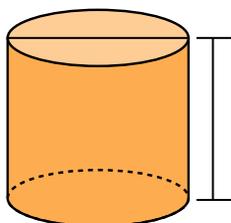
$$900 = r^2$$

$$30 = r$$

Radio: 30 cm

Diámetro: 60 cm

Altura: 56,26 cm



Volumen:  $158\,990,76 \text{ cm}^3$

Base:  $1\,590 \text{ cm}^2$

Cálculo del radio:

$$1\,590 = \pi r^2$$

$$1\,590 \div 3,14 = r^2$$

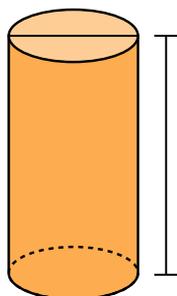
$$506,36 = r^2$$

$$22,50 = r$$

Radio: 22,50 cm

Diámetro: 45 cm

Altura: 100 cm



Volumen:  $159\,000 \text{ cm}^3$

Base:  $1\,766,66 \text{ cm}^2$

Cálculo del radio:

$$1\,766,66 = \pi r^2$$

$$1\,766,66 \div 3,14 = r^2$$

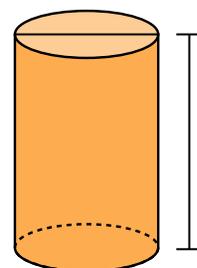
$$562,42 = r^2$$

$$23,72 = r$$

Radio: 23,72 cm

Diámetro: 47,44 cm

Altura: 90 cm



Volumen:  $158\,999,4 \text{ cm}^3$

### Cálculo de la capacidad y masa respectiva del petróleo transportado

Se cuenta con los siguientes datos:

- La densidad es la cantidad de masa por unidad de volumen. Contamos con el dato de la densidad del petróleo que es 0,8 g/ml.
- Camión-tanque cilíndrico con los siguientes datos:  
Diámetro: 2,5 m      Largo: 10 m
- El volumen de un cilindro se calcula a partir del radio (r) y la altura (h), con la fórmula:  $\pi r^2 h$
- Unidad "barril" equivale a 159 litros; y 1 dm<sup>3</sup> equivale a 1 litro.

Volumen del tanque:  $\pi r^2 h$

$$= (3,14)(1,25)^2(10)$$

$$= 49,0625 \text{ m}^3 = 49\,062,5 \text{ dm}^3 = 49\,062,5 \text{ litros}$$

Aplicamos una regla de tres para hallar la capacidad en barriles:

49 062,5 litros..... ¿?

159 litros..... 1 barril

Luego:  $49\,062,5 \div 159 = 308,56$  barriles

Se sabe que la densidad es igual a la masa sobre unidad de volumen. Para el caso del petróleo, la tenemos expresada en gramos y mililitros. Por ello, necesitamos realizar conversiones.

Volumen transportado: 49 062,5 litros = 49 062 500 mililitros

En esa medida, la masa es 39 250 000 g. Esto equivale a 39 250 kg o 39,250 toneladas.

# CUARTO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: La refinería de petróleo

Tiempo: 120 minutos

## 1. Contexto estímulo

La gasolina es una mezcla de hidrocarburos, obtenida a partir del petróleo, mediante un proceso realizado en una refinería. Esta se utiliza como combustible en motores de combustión interna, en estufas, en la limpieza con solventes, entre otros. Así como la gasolina, también se obtienen otros productos.



## 2. Tarea propuesta

- Calcular la capacidad de un tanque cilíndrico de una refinería de petróleo, a partir de la medida de su base circular y su altura. Además de ello, se debe evaluar la siguiente modificación:
  - Si se desea que su capacidad aumente en un 50%, ¿qué ocurriría con sus medidas?
- Diseñar y construir una maqueta con dos cilindros que tengan igual volumen, y cuyas respectivas bases circulares presenten diferente tamaño, o que tengan igual volumen y sus respectivas alturas diferente tamaño.

## 3. Planificación

Los estudiantes pueden trabajar con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que conllevan condicionantes o exigen la formulación de supuestos. Asimismo, pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones –incluidas las simbólicas–, y asociarlas directamente con situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas, y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. De igual modo, pueden elaborar y comunicar explicaciones, sobre la base de sus interpretaciones, argumentos y acciones.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes calculan el volumen de un cilindro en función del radio de la base y la altura. También, exploran las relaciones entre el volumen, la base y la altura de un cilindro.
- Los estudiantes determinan cómo los cambios en la medida del radio o la altura impactan en el volumen, y lo visualizan a través de la construcción de maquetas.

## Alineación con documentos curriculares peruanos

**Competencia**  
Forma, movimiento y localización/ Regularidad, equivalencia y cambio

### Indicador de las Rutas del Aprendizaje

Selecciona y combina estrategias para resolver problemas de área y volumen de cuerpos geométricos compuestos, poliedros y de revolución. Organiza datos en dos variables de fuentes de información al expresar un modelo referido a funciones.

### Estándar del nivel VIII Forma, movimiento y localización

Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas, procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; establecer relaciones de inclusión entre clases para clasificar formas geométricas; con apoyo de diversos recursos.

### Estándar del nivel VII Regularidad, equivalencia y cambio

Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos para generalizar la regla de formación de progresiones aritméticas y geométricas, hallar la suma de sus términos, simplificar expresiones usando identidades algebraicas y establecer equivalencias entre magnitudes derivadas; con apoyo de diversos recursos.

### 3.2. Materiales

- Fotografía de un tanque de petróleo que forma parte de una refinería
- Esquema de organizador gráfico, elaborado por el profesor en la pizarra
- Material para construir la maqueta: cartulina, pegamento, tijera, regla y lápiz, etc.
- Cuadro de medidas de tanques de almacenamiento

### 3.3. Organización del aula

Primero, se inicia con trabajo individual. Luego, se conforman pequeños grupos de hasta cuatro estudiantes, reunidos por la similitud en las estrategias empleadas durante el trabajo individual.

Esta forma de organización refuerza inicialmente las estrategias desarrolladas, y permite que los estudiantes sigan una misma forma de razonamiento.

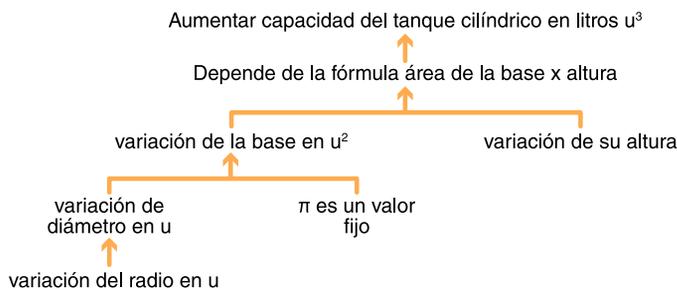
### 4. Procedimiento que debe seguir...

#### Inicio:

Individualmente, los estudiantes exploran la situación y recurren a los aprendizajes previos para encontrar caminos de solución.

Permita que los estudiantes generen ideas individuales acerca de cómo resolver la tarea. Para ello, invite a revisar sus apuntes de cuaderno, libros u otros. Recuerde que no necesariamente debe trabajar esta situación cuando esté desarrollando el tema. Puede emplear la situación para empezar el tema o para permitir establecer conexiones en un momento inesperado.

Invite a los estudiantes a realizar esquemas de dependencia o de tipo causal. Para ello, adapte la espina de Ishikawa (o árbol de problemas). Además, puede pedirles que anoten sus preguntas. Esto les ayudará en el proceso de elaboración de conjeturas o preguntas; y, posteriormente, en su comprobación. Un ejemplo podría ser el siguiente:

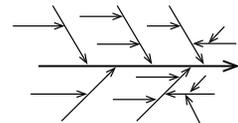


Algunas posibles preguntas podrían ser: “¿Deben aumentar ambas medidas en el 50%?”, “¿Solo debe aumentar una de las medidas?”, “¿Cómo afecta el hecho de que se multipliquen entre sí los valores?”, “¿Qué aspectos son los que debemos probar para tener seguridad de la respuesta?”, “¿Cómo exploramos los cambios en el radio y la altura?”, y “¿Cómo elaboramos la maqueta?”.

### Información para el docente

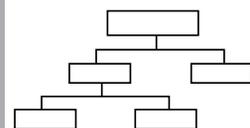
• El diagrama de Ishikawa (también, llamado diagrama de causa-efecto) presenta gráficamente el problema a analizar y las posibles causas que lo producen. Es una de las diversas herramientas surgidas en ámbitos de la industria para facilitar el análisis de problemas y sus soluciones. Fue concebido por el licenciado en Química japonés, Dr. Kaoru Ishikawa, en el año 1943.

Un modelo es el siguiente:



• El árbol de problemas ayuda a analizar las causas y efectos de un primer y segundo nivel de un problema central. Este permite definir los posibles objetivos y las rutas de solución para un problema.

Un modelo es el siguiente:



	Petróleos del Perú – PETROPERÚ S.A.
	<b>PROYECTO:</b> PLAN DE ABANDONO PARCIAL PARA EL DESMONTAJE DE TRECE (13) TANQUES DE REFINERÍA TALARA
	<b>CAPÍTULO:</b> DESCRIPCIÓN DE LAS INSTALACIONES Y OPERACIONES

**Tabla N° 4.1.2. Especificaciones técnicas de los trece tanques**

Número Local	Altura (m)	Diámetro (m)	Capacidad Nominal (BBL)	Capacidad Operativa (BBL)	Producto Almacenado	Tipo de Tanque	Nº de Anillos	Fondo del Estanco	Muro C.I. del Estanco	Área Estanca
<b>DFB-201B</b>	10,5	24,01	27 119	21 672	Gasolina 84	Techo flotante	7	Losa de concreto	Concreto	Individual
<b>115</b>	10,36	15,24	11 919	10 493	Petróleo industrial 6	Techo fijo	7	Tierra	Tierra	Compartida con Tanque 176
<b>176</b>	9,14	15,24	10 178	8 972	IFO-180/IFO-80	Techo fijo	6	Tierra	Tierra	Compartida con Tanque 115
<b>114</b>	10,91	22,18	8 000	7 082	Slop	Techo fijo	7	Tierra	Tierra	Compartida con Tanques 378 y 46
<b>467</b>	12,80	9,14	5 289	4 471	Slop	Techo fijo	7	Tierra	Tierra	Compartida con Tanques 378 y 114
<b>378</b>	10,06	24,69	31 172	27 611	PI 6 / PI 500 / FO380	Techo fijo	7	Tierra	Tierra	Compartida con Tanques 114 y 467
<b>547</b>	9,45	4,12	737	681	GLP	Vertical	6	Losa de concreto	Concreto	Compartida con Tanque 548
<b>548</b>	9,45	4,12	732	676	GLP	Vertical	6	Losa de concreto	Concreto	Compartida con Tanque 547
<b>509</b>	7,37	7,61	2 034	1 538	Turbo J-P5	Techo fijo	4	Tierra	Tierra	Individual
<b>812</b>	7,31	10,36	3 888	-----	Inoperativo	Techo fijo	4	Tierra	Concreto	Individual
<b>99</b>	5,46	6,10	1 000	782	Base asfáltica	Techo fijo	4	Tierra	Concreto	Compartida con Tanques 392 y 483
<b>FT-1</b>	12,19	13,41	10 834	10 834	Agua potable	Techo fijo	8	Tierra	Concreto	Compartida con Tanques 247 y 248
<b>256</b>	12,19	36,58	80 064	79 834,62	Crudo	Techo flotante	8	Losa de concreto	Tierra / Concreto	Individual

Tecnologías y Consultorías Ecológicas – TECONEC S.A.C.

**Proceso:**

Los estudiantes conversan para encontrar similitudes en los esquemas planteados o entre las interrogantes a las que ha llegado. A partir de ellas, se forman grupos de tres o cuatro estudiantes.

Presente la imagen de un tanque cilíndrico en una refinería. A partir de esta, proponga que exploren cómo cambia el volumen cuando, a pesar de que se mantiene constantes las medidas de la base, se modifica la medida de la altura.

Si lo considera necesario, podría sugerirse que hagan uso de una tabla para registrar sus hallazgos. El objetivo es determinar el valor que debería tener la altura para que el volumen aumente en un 50%. Luego, pida a los estudiantes que indaguen en cómo cambia el volumen cuando se mantiene constante la medida de la altura, pero se modifica la medida del radio de la base. El objetivo es determinar el valor que debería tomar el radio de la base para que el volumen aumente en un 50%. Finalmente, oriente a explorar la posibilidad de variar ambas medidas.

En la segunda parte, el trabajo se orienta a la construcción de las maquetas. Estas serán diseñadas y construidas con medidas distintas en cada grupo.

**Cierre:**

Los grupos comparten el trabajo realizado a partir de la presentación de sus maquetas y el proceso.

El objetivo es compartir la situación inicial de los estudiantes: lo que pensaron, lo que estimaron y cómo se sintieron. Después, estas situaciones se comparan con los resultados obtenidos y la forma de lograrlos.

De esta manera, se busca el enriquecimiento de estrategias y la vivencia de las múltiples posibilidades de respuesta para una misma situación.

**5. Posible estrategia de solución**

Cálculo de tanque cilíndrico.

Los estudiantes averiguan las medidas de un tanque de refinería y, de acuerdo con ello, aplican la fórmula del cilindro para determinar el volumen. Si bien colocamos valores redondos, se puede considerar los reales, indicados en el cuadro.

- Diámetro 10 m
- Radio 5 m
- Altura 5 m

Volumen:

$$= \pi r^2 h$$

$$= \pi(5^2)(5) = 125\pi = 125(3,14) = 392,50 \text{ m}^3 = 392\,500\,000 \text{ dm}^3$$

Aproximadamente 2 468 553 barriles

**Evaluación sugerida**

*Criterios para evaluar el organizador:*

- *Análisis de las partes del problema*
- *Argumentación del organizador*

*Los criterios para evaluar los resultados:*

- *Interpretación correcta de la exploración y resultados en los cambios de alguna de las variables involucradas*
- *Procedimientos o estrategia efectiva de desarrollo*
- *La elaboración y presentación de las maquetas*
- *Exactitud de los cálculos realizados*

**Información para el docente**

- *Los diámetros de los diferentes tanques variaban entre 10 m y 20 m, y sus alturas variaban entre 5 m y 20 m.*

### Variación de la capacidad

Mediante el análisis directo de la fórmula del volumen:  $\frac{150 \pi r^2 h}{100} = \frac{3 \pi r^2 h}{2} = 1,5 \pi r^2 h$

Volumen:  $\pi r^2 h$  Variación del volumen solicitada:

se observa que todo quedará multiplicado por 1,5. Ello significa que:

- Si se deja igual la base, la altura puede aumentar en el 50%. Es decir, la altura sería 1,5 multiplicado por el valor original.
- Sin modificar la altura, la base puede cambiar. Ello quiere decir que el radio quedaría multiplicado por 1,22; esta cifra es la raíz cuadrada de 1,5.
- Si los cambios ocurren de forma simultánea, se podría dividir el factor 1,5 en 2 factores, como 0,25 y 6. Uno de estos factores afectaría a la altura; y otro, a la base. Por ejemplo, la altura quedaría multiplicada por 6 y el radio quedaría multiplicado por 0,5 (que es la raíz cuadrada de 0,25). Es decir, la altura aumentaría y el radio disminuiría.
- Se pueden considerar otros factores de 1,5, tales como 1,25 y 1,2. Estos se aplican, respectivamente, al modificar la altura –la raíz cuadrada– de uno de ellos y al variar directamente el radio.

### Evaluación de los logros

*Propicie la corrección entre pares para favorecer paulatinamente la autonomía. Para ello, pida a los estudiantes que comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Asimismo, recuérdelos que deben ser claros al señalar sus aciertos y errores. De esta manera, estos últimos pueden ser identificados y enmendados durante el proceso.*

*Puede aplicar una evaluación orientada al logro específico de los aprendizajes esperados, como por ejemplo el siguiente insumo:*

1. Marca los círculos, según tu apreciación.

	No entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
<i>Reconozco los elementos del cilindro en relación con su área y volumen.</i>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<i>Calculo el volumen de un cilindro a partir del radio de la base y la altura.</i>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<i>Vario un porcentaje del volumen de un cilindro a partir del radio de la base y la altura.</i>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<i>Elaboro maquetas de cilindros en función de características específicas.</i>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. Responde según tu apreciación.

- ¿Qué dificultades tuviste en la actividad?*
- ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la actividad?*
- ¿Piensas que lograste lo que se esperaba de la actividad?*

# CUARTO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: La altura de una torre de perforación Tiempo: 120 minutos

## 1. Contexto estímulo

La perforación de un pozo petrolero se realiza con un equipo compuesto por una torre de –aproximadamente– 112 metros de altura y una mecha, que es la herramienta que permite perforar. En las explotaciones submarinas, la torre se instala en grandes plataformas.

## 2. Tarea propuesta

Construir una maqueta a escala de la torre de perforación petrolera. Esta debe ser presentada a partir de fotografías. Asimismo, se debe calcular la cantidad aproximada de fierro que se empleó en la construcción de dicha torre real.

## 3. Planificación

Los estudiantes pueden trabajar con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que conllevan condicionantes o exigen la formulación de supuestos. Asimismo, pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones –incluidas las simbólicas–, asociarlas directamente con situaciones del mundo real. Además, los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades desarrolladas, y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. De igual modo, pueden elaborar y comunicar explicaciones sobre la base de sus interpretaciones, argumentos y acciones.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes diseñan una estrategia en la que identifican y utilizan relaciones de proporcionalidad geométrica a partir de situaciones realistas.
- Los estudiantes interpretan y emplean escalas, sobre la base de supuestos y a través del cálculo de longitudes a partir de fotos o dibujos. Finalmente, explican la solución matemática del problema relacionándola con la situación de partida.

### 3.2. Materiales

- Fotografías de la torre de perforación de petróleo. De preferencia, una vista frontal y otra lateral. También, puede ser un dibujo de una torre de perforación petrolera; en este caso, la imagen se fotocopia para cada grupo.
- Organizador gráfico sobre el proceso que se debe seguir.



### Alineación con documentos curriculares peruanos

<b>Competencia</b> Forma, movimiento y localización	<p><b>Indicadores de las Rutas del Aprendizaje</b></p> <p>Relaciona elementos y propiedades geométricas de fuentes de información, y expresa modelos de cuerpos geométricos compuestos basados en poliedros, prismas y de revolución.</p>
--	---

- Materiales para construir la maqueta de la torre:
  - Para la estructura metálica: sorbetes, palitos, barritas hechas de papel periódico enrollado (reciclado)
  - Para unir las piezas: limpia tipo, cinta adhesiva, masking tape u otros
  - Regla claramente graduada, cuaderno de notas, lápiz y colores

### 3.3. Organización del aula

Forme grupos de cuatro o cinco estudiantes. Para ello, puede agrupar a los estudiantes por afinidad, o equilibrarlos de tal manera que existan grupos con integrantes que presenten diversas habilidades (manuales, artísticas, matemáticas, comunicativas).

### 4. Procedimiento que debe seguir...

#### Inicio:

Los estudiantes recuerdan, imaginan y organizan formas de resolver la tarea planteada.

Para ello, utilice la foto y, a partir de ella, solicite reflexionar sobre las siguientes preguntas: “¿Cómo obtener las medidas?”, “¿Qué recursos tenemos?”, “¿Cómo solucionamos la ausencia de uno u otro recurso?”, y “¿Cómo construimos la maqueta?”.

Fomente una lluvia de ideas, y regístrelas en la pizarra en dos columnas: una para la estrategia y otra para recursos. Después, pida a los estudiantes que elaboren un organizador gráfico –diagrama de flujo u otro– concerniente al trabajo que deben realizar. Finalmente, revise las ideas generales y discútalas con cada grupo.

#### Proceso:

Los estudiantes ejecutan el plan previamente trazado.

Se ejecuta el plan y se le introduce correcciones. Estas deberán ser anotadas para perfeccionar la planificación y, con ello, el proceso.

Se entregan las imágenes a utilizar y se induce tanto su observación por partes, como su medición y registro. En ese proceso, los estudiantes son los que establecen, de forma clara y ordenada, cómo se registrarán los datos.

Para empezar, los alumnos miden la altura de la torre presentada. Luego, determinan la escala de la maqueta, para lo cual deben considerar que la torre real tiene una altura de 50 m, 60 m u otros.

Después de ello, se les entrega a los estudiantes los materiales que eligieron para la confección de la maqueta. Finalmente, deben proceder al armado de la torre con los materiales escogidos.

### Alineación con documentos curriculares peruanos

#### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización.

*Interpreta, representa y determina distancias en mapas usando escalas.*

*Relaciona datos de diferentes fuentes de información referidas a situaciones sobre formas, localización y desplazamiento de objetos, y los expresa con modelos referidos a formas poligonales, cuerpos geométricos compuestos o de revolución, relaciones métricas, de semejanza y congruencia, y razones trigonométricas.*

### Información para el docente

- *Acerca de la torre de explotación petrolera*

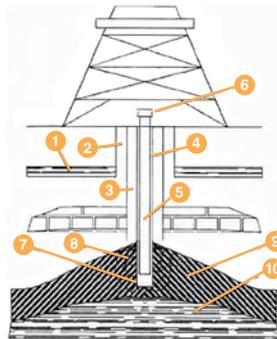


Figura 1b - Corte esquemático de un pozo: 1) Acuífero, 2) Tubería de superficie cementada, 3) Tubería intermedia cementada, 4) Tubería protectora de la producción cementada, 5) Tubería de producción (tubing), 6) Cabezal de conexión, 7) Perforación, 8) Gas Natural de vaciamiento 9 Formación petrolífera 10) Agua salada

El docente revisará el proceso de armado de la torre. Las medidas o cantidades estimadas de materiales –considerando una maqueta de 25 cm de altura– podrían estar alrededor de:

- Sorbetes, palitos, cañitas hechas de papel periódico enrollado (reciclado): 4,9 m en total
- Para unir las piezas: limpia tipo, cinta adhesiva, masking tape u otros que se usarán para las 52 uniones o empates y, además, para las dos plataformas

### Cierre:

Se busca compartir las formas de trabajo, a partir de lo cual se apunta a elegir las más adecuadas. El docente evaluará el armado de la torre.

La clase en su conjunto, mediante una exposición de las maquetas, tomará conocimiento y valorará los procedimientos y resultados obtenidos por cada uno de los grupos.

## 5. Posible estrategia de solución

### Calcular la cantidad aproximada de fierro en una torre real

Los estudiantes investigan acerca de la altura sobre el nivel del mar o suelo de una torre de perforación (también, puede ser el docente el que brinda la información):

- Altura real: 60 m.
- Altura en la foto: 9 cm (no se toma en cuenta la inclinación).
- Se considera una torre de perforación de base cuadrada.
- Se considera que la estructura se mantiene y se reduce de forma constante.

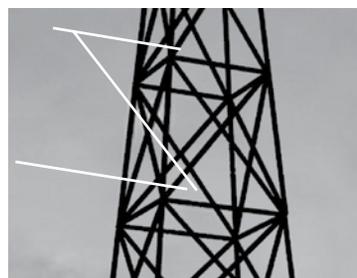
A partir de la escala establecida entre la altura real y la de la foto, se realiza una proyección para los otros componentes.

Posteriormente, se extraen los datos de algunos de los pisos y, con ello, se realiza una proyección para los otros pisos. Por ejemplo, al observar y colorear una parte de la foto, podemos distinguir la regularidad:

En cada piso, se observa el marco de un trapecio isósceles; y, al interior de este, las respectivas diagonales. En la medida en que se considera que la base es cuadrada, todas las caras presentarán una forma idéntica.

Al analizar la fotografía, se observa que todos los pisos –seis en total– tienen la misma altura, pero que el último es un poco menor. Si hacemos una generalización, podemos decir que en la foto  $9 - 1,20 = 7,80$  cm. Entonces, cada piso tiene  $7,80 \text{ cm} \div 6 = 1,30$  cm, lo que, en la realidad, es  $1950 \text{ cm} = 19,5$  m

Realizamos las mediciones en uno de los pisos que se puede apreciar completamente.



Cantidad de fierro en ese piso:

Los lados son 4:	$4 \times 1,35 = 5,40$
Las bases mayores son 4:	$1,21 \times 4 = 4,84$
Las bases menores son 4:	$0,92 \times 4 = 3,68$
Las diagonales son 8:	$3,52 \times 8 = 28,16$
Total en ese piso:	42,04 cm

Conversión a las medidas reales:  $42,04 \times 1\,500 = 63\,060$  cm o 630,60 metros

Se procede de manera similar con los otros pisos. Se debe tomar en cuenta que, a medida que aumenta la altura, la cantidad de material disminuye; y, si disminuye, esta aumenta. En este proceso, es posible que los estudiantes estimen una variación de porcentaje o trabajen con proporciones para realizar los cálculos con mayor rapidez.

### Evaluación de los logros

*Propicie la corrección entre pares para favorecer paulatinamente la valoración, la crítica y el desarrollo de la corrección fraterna y futura autocorrección autónoma. Para ello, solicite comparar las respuestas con sus compañeros, de tal manera que identifiquen aciertos y errores.*

*Puede aplicar una evaluación orientada al logro específico de los aprendizajes esperados, como el siguiente insumo:*

1. Marca un círculo según tu apreciación.

	No entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Reconozco los elementos necesarios para identificar la proporcionalidad.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Aplico la proporcionalidad de forma adecuada.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Interpreto y sé darle significado a los resultados obtenidos.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Desarrollo diversas formas de verificación del proceso realizado.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. Contesta según tu apreciación.

- ¿En qué parte de la actividad te sentiste más confiado en participar? ¿Por qué?
- ¿Qué te gustó de lo que hiciste en la actividad?
- ¿Piensas que conseguiste lo que se esperaba de la actividad?

# QUINTO GRADO DE SECUNDARIA

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: El envase de lubricante

Tiempo: 120 minutos

## 1. Contexto estímulo

Los lubricantes se comercializan en envases de muchas formas. En la comercialización mayorista, se utilizan baldes o cilindros. Tal es el caso del recipiente de 12 galones de capacidad, que se muestra en la figura adjunta.

## 2. Tarea propuesta

Hallar la superficie mínima de un envase cilíndrico con un volumen predeterminado.

Para esto, se debe establecer el volumen y la superficie del envase en función de su radio y altura. Este proceso previo permite definir la superficie de acuerdo con el radio. Luego, se tabularán datos y se buscará el valor del radio para que la superficie sea la mínima.

## 3. Planificación

Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, y pueden identificar los condicionantes y especificar los supuestos. Asimismo, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente a partir de habilidades de pensamiento y razonamiento desarrolladas. Del mismo modo, utilizan representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Además, pueden reflexionar sobre sus acciones, y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

### 3.1. Aprendizaje esperado

- Los estudiantes determinan procedimientos para el cálculo del volumen o área de un cilindro. Luego, formulan una función en relación de dependencia con una sola variable.
- Los estudiantes calculan el valor o valores que optimizan una función (por ejemplo, la superficie mínima para un volumen dado).



## Alineación con documentos curriculares peruanos

Competencia  
Forma, movimiento y localización/Regularidad, equivalencia y cambio

### Indicadores de las Rutas del Aprendizaje

Relaciona datos de diferentes fuentes de información referidas a situaciones sobre formas, localización y desplazamiento de objetos, y los expresa con modelos referidos a formas poligonales, cuerpos geométricos compuestos o de revolución, relaciones métricas, de semejanza y congruencia, y razones trigonométricas.

Reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver un problema.

### 3.2. Materiales

- Calculadora, computadora con software que permita graficar funciones matemáticas, o –en su defecto– papel milimetrado

### 3.3. Organización del aula

Se trabajará en grupos de tres estudiantes, preferentemente heterogéneos en su nivel de habilidad matemática. Para agruparlos, puede, con anticipación, separar a los estudiantes en tres conjuntos de mayor, mediana y baja habilidad matemática. A partir de esta división, se puede formar tríos que integren a los tres tipos de estudiantes. De esta forma, los más hábiles podrán sentirse ayudados por los menos hábiles. Asimismo, las inquietudes o dudas de los que tienen más dificultades reforzarán los aprendizajes de aquellos que tienen mayor habilidad para razonar, argumentar y comunicarse matemáticamente.

### 4. Procedimiento que debe seguir...

#### Inicio:

Los estudiantes planifican cómo resolver la tarea planteada.

Presente la imagen de un recipiente cilíndrico de lubricante.

Proponga preguntas como las siguientes: “¿Cuál es la expresión que relaciona el volumen de un cilindro con el radio de su base y la altura?”, “¿Cuál es la relación entre la superficie total del cilindro y la altura?”, “Si el volumen de cierto cilindro es fijo, ¿para qué valor o valores del radio la superficie total tomará

el menor valor?”, “¿Cómo expresar la superficie total únicamente en función del radio a partir de las expresiones anteriores?”. Pida a los estudiantes que elaboren un organizador gráfico concerniente al trabajo que deben realizar. Pueden señalar etapas; y, posteriormente, señalar recursos, tiempo y responsables para que tengan un mejor control de lo que se realizará. Por ejemplo:

<b>1</b>	Realizar un cambio de unidades	Tiempo: _____ Responsable: _____ Recursos: _____
<b>2</b>	Determinar el volumen y la superficie del balde cilíndrico en función del radio y la altura	Tiempo: _____ Responsable: _____ Recursos: _____
<b>3</b>	Formular el modelo de la superficie en función del radio	Tiempo: _____ Responsable: _____ Recursos: _____
<b>4</b>	Tabular valores hasta determinar el valor mínimo de la superficie	Tiempo: _____ Responsable: _____ Recursos: _____
<b>5</b>	Presentar el trabajo	Tiempo: _____ Responsable: _____ Recursos: _____

Revise las ideas respecto al procedimiento en cada grupo.

### Alineación con documentos curriculares peruanos

#### Estándar del nivel VI Forma, movimiento y localización

Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución (...).

#### Estándar del nivel V Regularidad, equivalencia y cambio

Relaciona datos provenientes de diferentes fuentes de información, referidas a diversas situaciones de regularidades, equivalencias y relaciones de variación; y las expresa en modelos de: sucesiones<sup>2</sup> con números racionales e irracionales, ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones lineales con una incógnita, funciones cuadráticas o trigonométricas.

### Información para el docente

Medidas referenciales de un balde de aceite lubricante:  
Balde de 5 galones y 20 litros.

**Proceso:**

Los estudiantes ejecutan el plan previamente trazado.

Lleve a cabo lo planificado e introduzca mejoras. Durante el proceso, tome nota de estas para perfeccionar la planificación y, con ello, el proceso.

Destaque que conviene trabajar en  $\text{cm}^3$ . Por ejemplo, si el volumen del balde es de 12 galones, los estudiantes deben expresar este volumen en  $\text{cm}^3$ . A partir de aquí, los estudiantes expresarán el volumen de un cilindro en función del radio y de la altura. Luego, reemplazarán el volumen calculado en el paso anterior y despejarán la altura.

Cabe anotar que la superficie del balde cilíndrico será expresada en función del radio y de la altura. Reemplazarán la expresión obtenida para la altura en la relación correspondiente a la superficie, de manera que esta dependa o esté en función solo del radio del balde.

Después, utilizarán la función hallada y completarán la tabulación siguiente:

r	10	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
Á											

Evaluarán resultados y responderán a la pregunta: "¿Para qué valor de r se obtiene una menor superficie; es decir, se usará la menor cantidad de material?". Si fuese necesario, deben tomar suficientes valores adicionales, para obtener el valor mínimo posible de la superficie. De este modo, podrán determinar las dimensiones que corresponden a la superficie mínima del balde: el radio y la altura.

Finalmente, los estudiantes deben presentar los procedimientos y resultados obtenidos.

**Cierre:**

Se busca compartir las formas de trabajo, de modo que se pueda reconocer formas diversas de solución e identificar la más apropiada, a nivel personal o del grupo.

Se presentarán los resultados y se sustentará el procedimiento seguido. Un grupo seleccionado presentará sus resultados a todos los estudiantes de la sección. Finalmente, el docente retroalimentará el avance y resultados.

**5. Posible estrategia de solución**

Se conoce la fórmula para el cálculo del volumen de un cilindro

$$V = \pi r^2 h \quad \text{de donde } h = V/\pi r^2.$$

En función de esta fórmula se puede realizar la exploración para hallar el valor o valores del radio para que la superficie del cilindro sea la menor posible.

**Evaluación sugerida**

- Criterios para revisar los resultados
- Procedimiento o estrategia eficaz de resolución
- Comprensión y uso adecuado de las equivalencias entre galones y  $\text{cm}^3$
- Relaciones claramente establecidas entre:
  - Volumen, radio y altura
  - Superficie, radio y altura
- Obtención de valores de las dimensiones solicitadas
- Pertinente aproximación en los cálculos realizados

La superficie de un balde cilíndrico sería:

$$\hat{A} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

Si reemplazamos el volumen, que es fijo, tenemos lo siguiente:

$$\hat{A} = 2\pi r(r + V/\pi r^2) = 2\pi r^2 + 2V/r$$

Realizamos la evaluación en función de 12 galones.

$$1 \text{ galón} = 3,7854118 \text{ litros}$$

Entonces, 12 galones = 45,42 litros o  $\text{dm}^3$ , aproximadamente, 45 420  $\text{cm}^3$ .

Observa lo que ocurre al tabular:

r	10	15	16	17
$\hat{A}$	$2\pi r^2 + 2V/r$ $200\pi + V/5$ <b>9 684</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $450\pi + 2V/15$ <b>7 406</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $523\pi + V/8$ <b>7 246,5</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $578\pi + 2V/17$ <b>7 077,53</b>

Cuando reemplazamos  $\pi$  por 3 y el valor en litros, se obtienen los resultados que aparecen en rojo en la tabla:

r	18	19	20	21
$\hat{A}$	$2\pi r^2 + 2V/r$ $648\pi + V/9$ <b>6 990,66</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $722\pi + 2V/19$ <b>6 947,05</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $800\pi + V/10$ <b>6 942</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $882\pi + 2V/25$ <b>6 971,71</b>

r	22	23
$\hat{A}$	$2\pi r^2 + 2V/r$ $968\pi + V/11$ <b>7 033,09</b>	$2\pi r^2 + 2V/r$ $1\ 058\pi + 2V/23$ <b>7 123,56</b>

Observamos que cerca a 20 cm de radio la cantidad de material es la menor, pues en 21 empieza a subir nuevamente.

Si se desea, es posible variar los cálculos para números cercanos a 20, antes y después de él, con decimales.

A partir del valor hallado, se calcula la cantidad de material en  $\text{cm}^2$ , que es la unidad de medida elegida:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 2\pi r^2 + 2V/r \\ &= 2(3)(20)^2 + 2(45\ 420)/20 \\ &= 2\ 400 + 4\ 542 \\ &= 6\ 942 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

### Información para el docente

- El redondeo de  $\pi$  a 3 puede alterar los cálculos. Si usted trabaja con más expresiones decimales, el valor del menor uso de material variará. Puede tener grupos que trabajen con enteros y otros con mayor cantidad de cifras decimales.
- El valor se orienta a que la altura del cilindro sea el doble del radio, o —lo que es lo mismo—, la altura del cilindro sea igual que el diámetro del mismo.

	Producto		
	Insuficiente (4 puntos)	Bueno (6 puntos)	Excelente (8 puntos)
Conversiones	Irregular o no adecuada.	Correcta, pero no adecuada.	Adecuada y correcta.
Cálculos de medidas	Muchos errores.	Algunos errores.	Buenos cálculos.
Presentación	No cumple con los datos mínimos, como nombres y título.	Cumple con los datos informativos y estructura.	Creativa, original y cumple con los datos informativos.

### Evaluación sugerida

- Para el trabajo del producto, se sugiere que cada estudiante se pueda autoevaluar y que, luego, sea evaluado por un compañero al azar.
- Para el trabajo grupal, se debe evaluar a todos los integrantes.

	Trabajo grupal		
	Insuficiente (2 puntos)	Bueno (3 puntos)	Excelente (4 puntos)
Nivel de apoyo interno	No se da. Cada uno hace su parte.	Se apoyan esporádicamente.	Se dan apoyo mutuo y están atentos a la ayuda necesaria.
Comprensión de la tarea	Trabaja y, en el proceso, tiene dudas iniciales.	Preguntan al inicio y en el proceso de ejecución.	Preguntan siempre antes de la ejecución de la tarea.
Ejecución	Ensayan procedimientos sin planificar.	Establecen pasos que cambian drásticamente a lo largo de la ejecución.	Establecen pasos que se perfeccionan durante la ejecución.
Presentación	Exposición desestructurada.	Exposición parcialmente estructurada.	Exposición claramente estructurada.

## Referencias bibliográficas

- Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En Callejo, M. y Goñi, J. (coordinadores), *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 89-99). Barcelona: Graó.
- Callejo, M. (2000). *Educación matemática y ciudadanía: propuestas desde los derechos humanos*. Santo Domingo: Editorial Centro Cultural Poveda.
- Caraballo, R., Rico, L. y Lupiáñez, J. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: el caso de las Matemáticas. En Profesorado: *revista de curriculum y formación del profesorado*. Granada: Universidad de Granada.
- D'amore, B., Díaz Godino, J. & Fandiño, M. (2008). *Competencia y matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. (2013a). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Matemática: Números y operaciones*. Lima.
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. (2013b). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Matemática: Cambio y relaciones*. Lima.
- Mclauchlan, P. y Ferrer, J. (2003). *Las pruebas internacionales en América Latina y su impacto en la calidad de la educación: criterios para guiar futuras aplicaciones* (Documento de trabajo N° 26). Santiago: PREAL.
- Marín, R., Lay, C. y Urbano, J. (2012). *Matemática 1*. (Texto escolar, licitación pública, Ministerio de Educación). Lima: Grupo Editorial Norma S.A.C.
- Marín, R., Silva Santisteban, J., Vergaray, A., Espinoza, N. y Onsihuay, E. (2012). *Matemática 2*. (Texto escolar, licitación pública, Ministerio de Educación). Lima: Grupo Editorial Norma S.A.C.
- Math is more. (n.d.) *Mission Statement*. Consultado el 20 de octubre de 2014, página web de Maths is more. Toward a National Consensus on Improving U.S. Mathematics Education: <http://www.mathismore.net/>
- Ministerio de Educación del Perú. Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2005). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados*. Lima: Autor
- Ministerio de Educación del Perú. Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2014). *PISA 2012: Primeros resultados. Informe nacional del Perú. Serie evaluaciones y factores asociados*. Lima: Autor
- Ministerio de Educación del Perú (2015a). *Rutas del aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas? Fascículo 1. Número y Operaciones Cambio y relaciones. III ciclo Primer y segundo grado de Educación Primaria*. Versión 2015. Lima: Autor
- Ministerio de Educación del Perú. (2015b). *Rutas del aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas? Fascículo 1. Número y Operaciones Cambio y relaciones. IV ciclo Tercer y cuarto grado de Educación Primaria*. Versión 2015. Lima: Autor.
- Ministerio de Educación del Perú. (2013c). *Rutas del aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas? Fascículo 1. Número y Operaciones Cambio y relaciones. V ciclo Quinto y sexto grado de Educación Primaria*. Lima.
- OECD (2003). *PISA 2000 Technical Report*. París: OECD.
- OECD (2004a). *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. París: OECD.
- OECD (2004b). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Gobierno de España.
- OECD (2007). *PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world. Volume 1 - Analysis*. París: OECD.
- OECD (2010a). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do*. París: OECD.
- OECD (2010b). *PISA 2009 Results: Learning Trends*. París: OECD.
- OECD (2012). *PISA 2009 Technical Report*. París: OECD.
- OECD (2013a). *PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science*. París: OECD.
- OECD (2013b). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy* (p. 264). París: OECD.
- OECD (2013c). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Gobierno de España .
- OECD & Unesco/UIS (2003). *Literacy skills for the World of tomorrow. Further results from PISA 2000*. París, Montreal: OECD, Unesco/UIS.
- Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2008). *Metas 2021. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Madrid: OEI.
- Organización de las Naciones Unidas. Conferencia de las Naciones Unidas sobre Comercio y Desarrollo (2011). *Examen de las Políticas de Ciencia, Tecnología e Innovación*. Perú, Suiza: ONU-Unctad.
- Ramos, R., Silva Sabtisteban, J. y Onsihuay, E. (2012). *Matemática 3*. (Texto escolar, licitación pública, Ministerio de Educación). Lima: Grupo Editorial Norma S.A.C.
- Santillana, Departamento de Ediciones. (2012). *4 Matemática*. (Texto escolar, licitación pública, Ministerio de Educación). Lima: Santillana S.A.
- Santillana, Departamento de Ediciones. (2012). *5 Matemática*. (Texto escolar, licitación pública, Ministerio de Educación). Lima: Santillana S.A.
- Santos, L. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México D.F.: Iberoamérica.





**anexos**



# ANEXO 1

Contenidos matemáticos del Diseño Curricular Nacional (DCN) y de los textos de secundaria asociados a las subcategorías de Matemática de la prueba PISA

**Tabla A1.1. Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Cantidad**

Grado de secundaria	Contenidos del DCN y de textos escolares del Ministerio de Educación
1	Representación, orden y operaciones con números naturales, enteros y racionales. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representación y orden de números naturales</li> <li>- Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación de números naturales</li> <li>- Representación de números enteros, opuesto y valor absoluto de un número entero</li> <li>- Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de números enteros, operaciones combinadas</li> <li>- Fracciones, fracciones equivalentes, números racionales</li> <li>- Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación en números racionales</li> <li>- Expresiones decimales de un número racional</li> <li>- Operaciones con expresiones decimales racionales</li> </ul> Conversiones de unidades de longitud, masa y capacidad en el sistema métrico decimal <ul style="list-style-type: none"> <li>- Medida, múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida</li> <li>- Conversión de unidades de longitud en el sistema métrico decimal (SMD)</li> <li>- Conversión de unidades de longitud en el SMD</li> <li>- Conversión de unidades de capacidad en el SMD</li> <li>- Construcción y medición de ángulos y segmentos</li> </ul>
2	Representación, orden, densidad y operaciones con números racionales. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fracción y números racionales</li> <li>- Representación de números racionales en la recta numérica</li> <li>- Orden y densidad de números racionales</li> <li>- Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación con exponentes enteros y radicación exacta de números racionales</li> </ul> Conversión de unidades cúbicas en el sistema métrico decimal. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ángulos adyacentes, ángulos entre dos rectas en el espacio, ángulos diedros</li> <li>- Conversión de unidades cúbicas en el SMD</li> </ul>
3	Representación, orden, operaciones con los números reales. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Números reales</li> <li>- Representación y relación de orden en los números reales</li> <li>- Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de números reales</li> </ul> Intervalos. Representación y operaciones <ul style="list-style-type: none"> <li>- Intervalos y valor absoluto</li> <li>- Operaciones con intervalos: unión, intersección, diferencia</li> <li>- Valor absoluto</li> </ul>
4	Densidad y completitud de los números reales. Operaciones. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Conjunto de números reales</li> <li>- Propiedad de densidad y completitud</li> <li>- Relación de orden</li> <li>- Operaciones con números reales</li> <li>- Radicales</li> </ul> Interés simple y compuesto <ul style="list-style-type: none"> <li>- Modelos financieros de interés</li> </ul>
5	Relaciones entre los sistemas numéricos: N, Z, Q y R.

**Tabla A1.2. Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Cambio y relaciones**

Grado de secundaria	Contenidos del DCN y de textos escolares del Ministerio de Educación
1	<p>Patrones numéricos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sucesión numérica</li> <li>- Patrones numéricos</li> </ul> <p>Ecuaciones lineales con una incógnita</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Expresiones algebraicas</li> <li>- Polinomios, valor numérico de polinomios</li> <li>- Ecuaciones en <math>Z</math></li> <li>- Ecuaciones e inecuaciones en <math>Q</math></li> </ul> <p>Representación tabular y gráfica de funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Funciones, variables</li> <li>- Representación tabular y gráfica de una función</li> <li>- Dominio y rango de funciones</li> </ul> <p>Proporcionalidad directa e inversa</p>
2	<p>Función lineal</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dominio y rango de una función lineal</li> </ul> <p>Función lineal afín</p> <p>Modelos lineales</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representación verbal, tabular y gráfica de las funciones lineales</li> </ul> <p>Proporcionalidad directa e inversa</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Proporcionalidad directa, representación gráfica</li> <li>- Proporcionalidad inversa, representación gráfica</li> <li>- Regla de tres simple</li> <li>- Regla de tres compuesta</li> <li>- Porcentaje</li> </ul> <p>Introducción al álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reducción de términos semejantes</li> <li>- Teoría de exponentes</li> <li>- Operaciones con polinomios y valor numérico</li> <li>- Adición, sustracción y multiplicación de polinomios</li> <li>- Factorización</li> </ul>
3	<p>Polinomios en <math>R</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Expresión algebraica, clases</li> <li>- Polinomios en <math>R</math></li> <li>- Polinomios especiales</li> <li>- Productos notables de binomios</li> <li>- Factorización de polinomios, factor común</li> </ul> <p>Ecuaciones cuadráticas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ecuaciones cuadráticas con una incógnita</li> </ul> <p>Modelación de fenómenos del mundo real con funciones</p> <p>Análisis de funciones cuadráticas</p>
4	<p>Progresiones aritméticas (PA) y progresiones geométricas (PG)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Término general</li> <li>- Suma de los <math>n</math> primeros términos de una PA</li> </ul> <p>Inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita</p> <p>Sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas</p>

**Tabla A1.3. Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Espacio y forma**

Grado de secundaria	Contenidos del DCN y de textos escolares del Ministerio de Educación
1	<p>Polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Clasificación</li> <li>- Ángulos internos y externos de un polígono regular</li> </ul> <p>Perímetros y áreas de figuras poligonales</p> <p>Simetría: simetría axial, simetría puntual</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistema rectangular de coordenadas</li> <li>- Simetría axial y simetría puntual</li> </ul> <p>Operaciones de traslación y rotación de figuras geométricas en el plano cartesiano</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Traslación</li> <li>- Rotación</li> <li>- Composición de transformaciones</li> </ul> <p>Geometría del espacio y transformaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cubo, prisma y cilindro</li> </ul>
2	<p>Rectas, ángulos y triángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rectas paralelas y perpendiculares</li> <li>- Ángulos y líneas notables en el triángulo</li> </ul> <p>Polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Perímetros y áreas de figuras planas</li> <li>- Polígonos regulares e irregulares</li> </ul> <p>Longitud de circunferencia y área del círculo</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Longitud de la circunferencia</li> <li>- Área del círculo</li> <li>- Líneas notables en la circunferencia</li> </ul> <p>Áreas lateral y total de la pirámide y del cono</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pirámide y cono</li> <li>- Desarrollo de la pirámide</li> <li>- Área lateral y total del cono</li> </ul> <p>Traslación, rotación y reflexión de figuras geométricas planas respecto a un eje de simetría</p> <p>Composición de transformaciones</p> <p>Puntos, rectas y planos en el espacio</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posiciones relativas de dos figuras en el espacio</li> </ul> <p>Ángulos en el espacio</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ángulo diedro y ángulo poliedro</li> </ul>
3	<p>Ángulos y figuras planas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rectas paralelas y secantes</li> </ul> <p>Congruencia y semejanza de triángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema de Tales</li> <li>- Congruencia y semejanza de triángulos</li> </ul> <p>Convexidad y dilatación de figuras geométricas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Área de polígonos convexos y no convexos</li> </ul> <p>Área y volumen de poliedros: prisma, cilindro, cubo, pirámide y cono</p> <p>Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo</p> <p>Ángulo de elevación y depresión</p>
4	<p>Diagonales y suma de ángulos en polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Triangulación</li> <li>- Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono</li> </ul> <p>Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano</p> <p>Triángulos rectángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema de Pitágoras</li> <li>- Triángulos rectángulos notables</li> <li>- Lema de Tales</li> <li>- Semejanza de triángulos</li> </ul> <p>Resolución de los triángulos rectángulos</p> <p>Circunferencia inscrita y circunscrita a un polígono regular</p> <p>Áreas irregulares compuestas por regiones circulares</p> <p>Esfera</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Área de la superficie y volumen de la esfera</li> </ul>
5	<p>Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios</p>

**Tabla A1.4. Contenidos matemáticos de los textos de secundaria asociados al contenido de Incertidumbre y datos**

Grado de secundaria	Contenidos del DCN y de textos escolares del Ministerio de Educación
1	<p>Gráfico de barras, pictogramas y tablas de frecuencias absolutas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Frecuencia absoluta y frecuencia relativa</li> <li>- Tablas de frecuencias</li> <li>- Tablas de frecuencias con intervalos</li> </ul> <p>Promedio aritmético, simple y ponderado; mediana y moda en datos numéricos no agrupados</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Promedio aritmético</li> <li>- Mediana y moda</li> </ul> <p>Sucesos y espacio de sucesos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Diagrama de árbol</li> </ul> <p>Probabilidad de eventos equiprobables</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Experimento determinístico y aleatorio</li> </ul>
2	<p>Tablas de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas con datos numéricos no agrupados y agrupados</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tablas de frecuencia para datos no agrupados y para datos agrupados</li> </ul> <p>Diagramas circulares y diagramas lineales</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gráficos de barras y diagrama circular</li> <li>- Histograma y polígonos de frecuencias</li> </ul> <p>Media, mediana y moda</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Medidas de tendencia central</li> <li>- Relación entre la media, mediana y moda</li> </ul> <p>Combinatoria</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Principio de multiplicación</li> <li>- Permutación</li> <li>- Permutación con repetición</li> <li>- Variación</li> <li>- Combinación</li> </ul> <p>Probabilidad de sucesos equiprobables. Regla de Laplace</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Azar</li> <li>- Experimento determinístico y aleatorio</li> <li>- Probabilidad de sucesos equiprobables, Regla de Laplace</li> </ul> <p>Composición de principios de conteo</p>
3	<p>Medidas de tendencia central</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Media aritmética, mediana, moda, relación entre la media, la mediana y la moda</li> </ul> <p>Variables discretas y variables continuas</p> <p>Medidas de dispersión: varianza, desviaciones media y estándar</p> <p>Probabilidad en diagrama de árbol</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Frecuencia de un suceso</li> <li>- Definición y cálculo de la probabilidad</li> <li>- Relaciones entre dos sucesos</li> </ul> <p>Estudio de la combinatoria</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Permutaciones</li> <li>- Distribuciones</li> </ul>
4	<p>Probabilidad de un evento</p>

# ANEXO 2

## Definición de competencia matemática en PISA 2003 y PISA 2012

PISA 2012 tuvo como centro la evaluación de la competencia matemática, al igual que PISA 2003. En ambas evaluaciones, se buscó establecer si los estudiantes son capaces de utilizar lo que han aprendido en situaciones que simulan la vida cotidiana. En este esquema, la competencia matemática implica tener la habilidad para formular, emplear e interpretar problemas usando la Matemática en una variedad de situaciones y contextos que van de lo sencillo a lo complejo. No se reduce a dominar conceptos, terminología, simbología, datos o procedimientos matemáticos. Tampoco, se limita a la habilidad para calcular y poner en práctica determinadas estrategias o métodos, sino más bien se consolida como una combinación de estos y otros elementos –como las motivaciones, expectativas y actitudes hacia la Matemática– que intervienen cuando un estudiante responde a los retos que se plantean en contextos reales.

Es interesante notar que el marco de trabajo de la evaluación matemática en PISA ha tenido algunas variaciones a lo largo de los años. Como resultado, la definición de competencia matemática ha ido cambiando, como se observa en la Tabla A2.1.

**Tabla A2.1. Definición de la competencia matemática en PISA 2003 y en PISA 2012**

PISA 2003	PISA 2012
<p>La competencia matemática en PISA 2003 se define como “la capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que juegan las matemáticas en el mundo, para realizar juicios bien fundados y para usar e involucrarse con las matemáticas para satisfacer las necesidades de su vida como un ciudadano reflexivo, constructivo y consciente” (OECD, 2004b, p. 24).</p>	<p>La competencia matemática en PISA 2012 se define como “la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonar matemáticamente y el usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar, y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que juegan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos” (OECD, 2013b, p. 4).</p>

Al realizar la comparación entre ambas definiciones se observa que, en PISA 2012, existe una mayor riqueza conceptual, puesto que en esta definición los procesos formular, emplear e interpretar se encuentran de manera explícita, a diferencia de la definición del 2003, en la que los procesos se presentan de forma imprecisa e implícita. Además, en la definición actual, se hace alusión a la aplicación de estos procesos en diversos contextos; se menciona también el razonar matemáticamente y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas cuya intención es describir, explicar y predecir fenómenos. Se pone de manifiesto así la importancia de razonar y usar elementos matemáticos que el estudiante ha adquirido o posee para resolver situaciones problemáticas.

# ANEXO 3

## Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso, Subcategoría: Formular

En el siguiente ejemplo, se presenta una pregunta de mayor nivel de dificultad, que también prioriza el proceso *Formular* con el mismo estímulo que el ejemplo anterior.

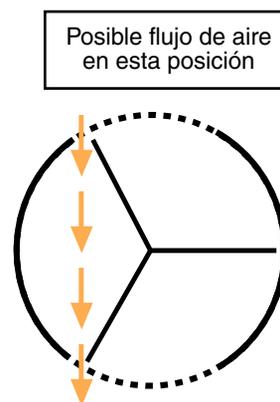
**Figura A3.1. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Formular**

### PUERTA GIRATORIA

#### Pregunta

PM995Q02 – 019

Las dos **aberturas** de la puerta (los arcos punteados en el diagrama) son del mismo tamaño. Si estas aberturas son demasiado anchas, las hojas giratorias no pueden proporcionar un espacio cerrado y el aire podría fluir libremente entre la entrada y la salida, lo cual causaría pérdidas o ganancias de calor no deseadas. Esto se muestra en el dibujo de al lado.



¿Cuál es la máxima longitud del arco en centímetros (cm) que cada abertura de la puerta puede tener para que el aire no circule nunca libremente entre la entrada y la salida?

.....  
 .....

Máxima longitud del arco: ..... cm

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Interpreta un modelo geométrico en una situación de la vida real para calcular la longitud de un arco de circunferencia

**Contenido:** Espacio y forma

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Científico

**Medida:** 840

**Dificultad:** Nivel 6

**Respuesta:** *correcta* Respuestas en un rango de 103 a 105 cm es correcta.

**¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?**

Las capacidades detrás de este proceso son la matemización y la representación dadas al representar la información geométrica no explícita y en un modelo que se requiere.

Al resolver esta pregunta, se pudo seguir el proceso *Formular* presentado a continuación.

Figura A3.2. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Formular*

Problema: Longitud máxima de puerta para que no se filtre aire

### Actividades cognitivas y proceso del estudiante

- Elementos relevantes y simplificación del problema:** Se elige la información relevante según la pregunta. Se relacionan los datos del problema y los conocimientos matemáticos que se recuerdan.

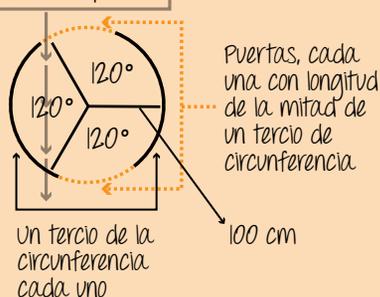
**Resultado:**

Hay 3 sectores circulares que dividen una circunferencia de 200 cm de diámetro. ¿cuál es la longitud máxima del arco en centímetros que pueden tener 2 puertas iguales para que el aire no circule libremente de entrada a salida?

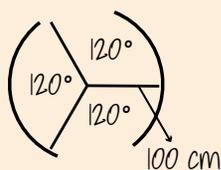
- Representación y estructura matemática:** Varía según el estudiante, sería en torno a longitud de la circunferencia. Deducen datos.

**Resultado:**

Posible circulación del aire en esta posición.



### Resultado obtenido al resolver la pregunta



$$360^\circ \text{ ---- } 2\pi (100)$$

$$120^\circ \text{ ---- } 2\pi (100)/3$$

Como son 2 puertas, se divide entre 2:

$$2\pi (100)/6 =$$

$$2(3,14)/6 = 628/6$$

104,66 cm



$$\frac{2\pi (100)}{6} =$$

$$\frac{2(3) (100)}{6} =$$

$$= 100 \text{ cm}$$

Solo de acepta si  $\pi$  se considera cbmo 3, porque podría ser coincidencia con dato.



$$\frac{2\pi (100)}{6} =$$

$$\frac{2(3,1) (100)}{6} =$$

$$\frac{620}{6} = 103 \text{ cm}$$

El proceso *Formular*, también, se evaluó mediante preguntas que no implican la resolución de un problema en sí mismo, como se observa en la pregunta presentada en la siguiente figura.

Figura A3.3 Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en el proceso *Formular*

REPRODUCTORES MP3

Musicalandia, especialistas en MP3		
Reproductor MP3  155 zeds	Audifonos  86 zeds	Parlantes  79 zeds

Pregunta

PM904Q04

El precio normal de venta de los reproductores MP3 **incluye** una ganancia de 37,5%. El precio sin esta ganancia es llamado precio de venta al por mayor. La ganancia es calculada como un porcentaje del precio de venta al por mayor.

Las siguientes fórmulas, ¿muestran una relación correcta entre el precio de venta al por mayor,  $m$ , y el precio normal de venta,  $v$ ?

Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada una de las siguientes fórmulas.

Fórmula	¿La fórmula es correcta?
$v = m + 0,375$	Sí / No
$m = v + 0,375 v$	Sí / No
$v = 1,375 m$	Sí / No
$m = 0,625 v$	Sí / No

Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Decide si una fórmula algebraica conecta correctamente dos variables monetarias, de las cuales una incluye un margen de porcentaje establecido.

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Formular

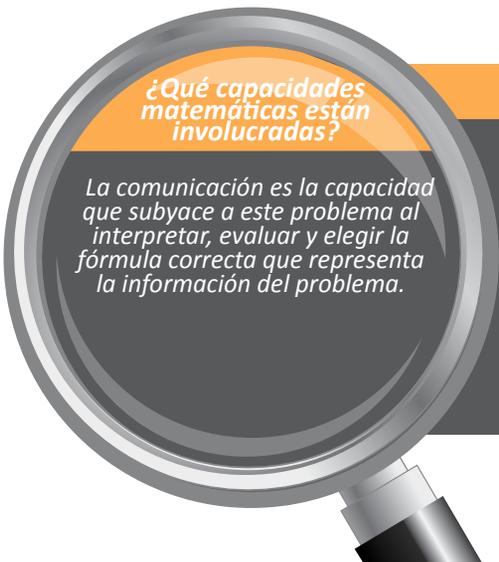
**Contexto:** Ocupacional

**Respuesta:** correcta No/No/Sí/No



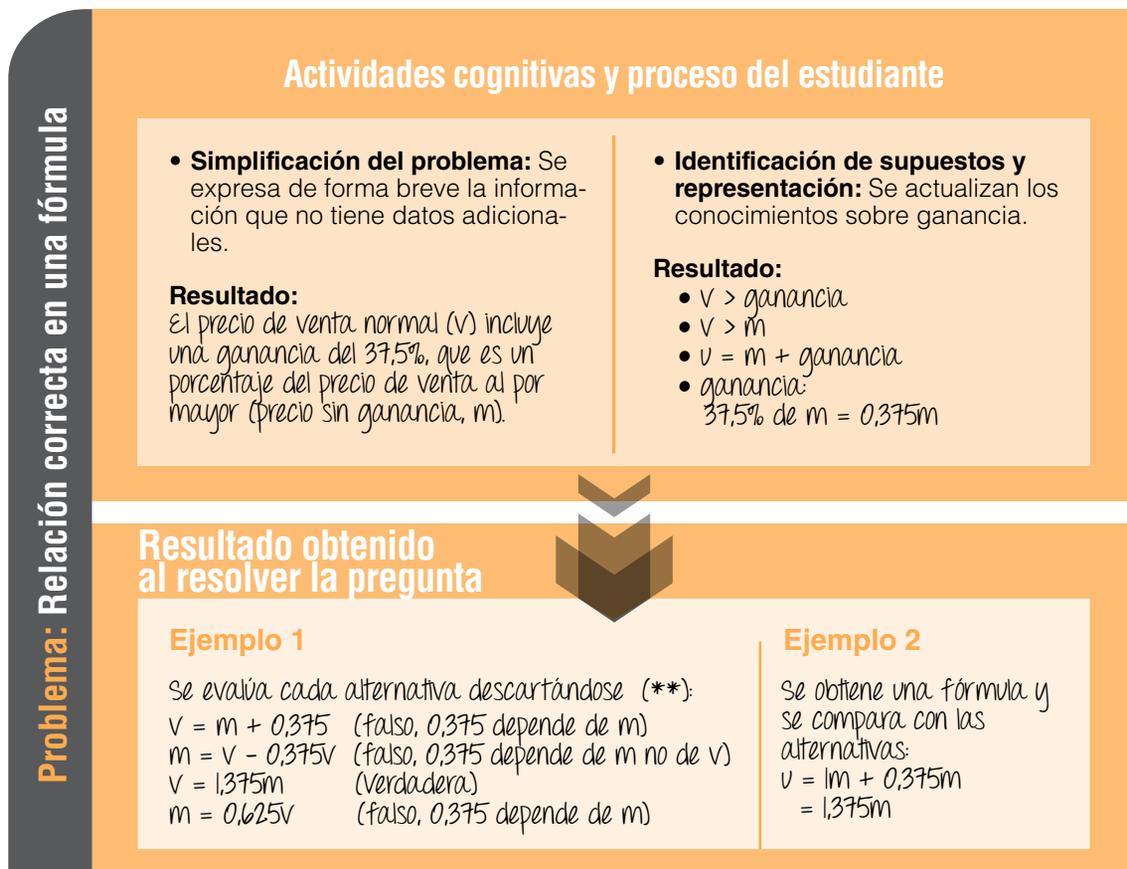
*¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?*

*La comunicación es la capacidad que subyace a este problema al interpretar, evaluar y elegir la fórmula correcta que representa la información del problema.*



Para resolver esta pregunta, el estudiante pudo seguir el proceso *Formular* según la siguiente figura.

**Figura A3.4. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Formular***



(\*\*) La justificación usualmente no la realiza el estudiante, porque no se solicita.

El proceso *Formular* es evaluado en la identificación de la representación matemática adecuada para una situación real; en este caso, la venta de un artículo. El estudiante puede optar por diversas estrategias, pero lo más relevante en el proceso *Formular* consiste en la identificación de los conceptos involucrados, las relaciones que se establecen entre ellos y la representación de los mismos a través de una fórmula. Si bien no todo estudiante realiza el último paso y –en lugar de ello– recurre a la evaluación de cada alternativa, en la interpretación de cada fórmula se hacen evidentes los conceptos, las relaciones y los supuestos que se emplean en cada caso.

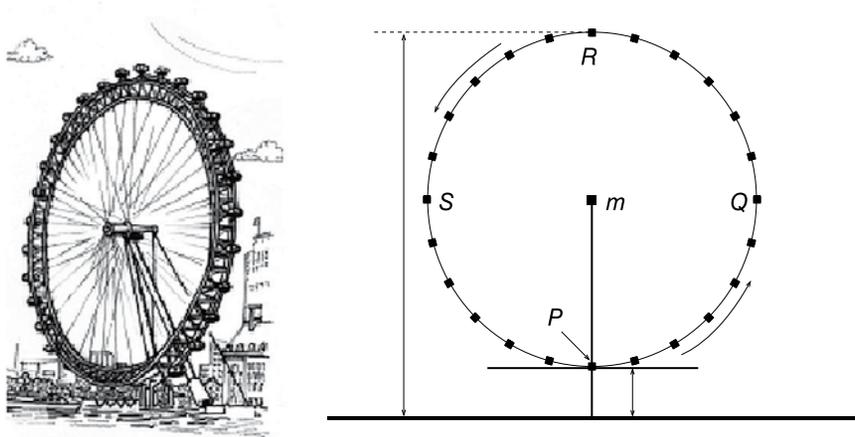
Preguntas de este tipo pueden ser incorporadas en la práctica de aula, a partir de lo cual se puede enfatizar en la necesidad de que el estudiante comunique las razones para realizar una elección, o que haga evidentes los supuestos que emplea al realizar una representación.

El proceso *Formular*, también, puede ser evaluado mediante tareas con poca información adicional o que no implican la resolución de un problema, como se observa a continuación.

**Figura A3.5. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Formular**

### LA RUEDA DE LA FORTUNA

Una gigante rueda de la fortuna se encuentra al lado del río. Mira la foto y el diagrama presentados a continuación.



La rueda de la fortuna tiene un diámetro exterior de 140 metros y su punto más alto está a 150 metros por encima y a un lado del cauce del río Támesis. Esta gira en el sentido indicado por las flechas.

#### Pregunta

PM934Q02

La rueda de la fortuna gira a una velocidad constante. La rueda da una vuelta completa en exactamente 40 minutos.

Juan comienza su paseo en la rueda de la fortuna en el punto de embarque,  $P$ .

¿Dónde estará Juan después de media hora?

- A. En  $R$
- B. Entre  $R$  y  $S$
- C. En  $S$
- D. Entre  $S$  y  $P$

#### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Estima una ubicación a partir de la rotación de un objeto y del tiempo específico y del tiempo que le tomó.

**Contenido:** Espacio y forma

**Proceso:** Formular

**Contexto:** Social

**Medida:** 481

**Dificultad:** Nivel 3

**Respuesta:** correcta: C. En  $S$

**¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?**

*La representación es la capacidad que fundamentalmente permite al estudiante comprender el problema y la información dada en él y resolverlo adecuadamente.*

Para resolver esta pregunta, el estudiante pudo seguir el proceso *Formular* según la siguiente figura.

**Figura A3.6. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Formular***

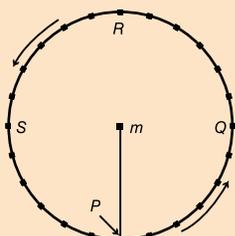
Problema: Ubicación en una rueda luego de 30 minutos

### Actividades cognitivas y proceso del estudiante

- **Simplificación del problema y estructura matemática:** Se identifican los datos según la pregunta y se establecen los elementos que permiten solucionarlo.

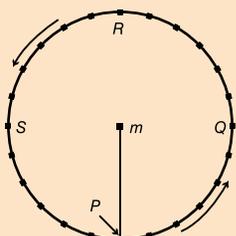
**Resultado:**

**Ejemplo 1**



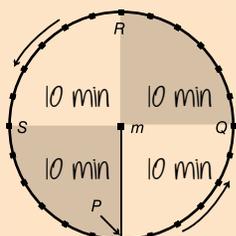
1 vuelta -- 40 min

**Ejemplo 2**



40 min -- 24 puntos

**Ejemplo 3**





### Resultado obtenido al resolver la pregunta

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
1 vuelta -- 40 min 0,75 -- 30 min  Estará en el punto S	40 min -- 24 puntos recorridos 30 min -- 18 puntos recorridos  Estará en el punto S.	$10 + 10 + 10 = 30$  Estará en el punto S.

En preguntas en las que se tiene poca información adicional, muchas veces, se puede observar una respuesta directa del estudiante en la que no necesariamente se registra información que pueda ayudar al docente a interpretar el proceso de formulación o en la que aparentemente se aplica un procedimiento como la suma, que a simple vista no se relaciona con el problema si no se ve que se ha asociado a la cuarta parte del giro. Frente a ello, en la práctica docente, se recomienda hacer explícita la necesidad de que el estudiante deje evidencia de su forma de razonamiento o que justifique las acciones que realiza para resolver un problema.

# ANEXO 4

Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso; Subcategoría: Emplear

**Figura A4.1. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en *Emplear***

## Pregunta:

PM957Q02

Elena recorrió 6 km hasta la casa de su tía. Su velocímetro mostró una velocidad promedio de 18 km/h para todo el trayecto.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A. A Elena le tomó 20 minutos llegar a la casa de su tía.
- B. A Elena le tomó 30 minutos llegar a la casa de su tía.
- C. A Elena le tomó 3 horas llegar a la casa de su tía.
- D. Es imposible decir cuánto tiempo le tomó a Elena llegar a la casa de su tía.

## Esta pregunta, ¿qué evalúa?

**Indicador:** Calcula el tiempo de recorrido a partir de la velocidad promedio y la distancia recorrida.

**Contenido:** Cambio y relaciones

**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Personal

**Medida:** 511

**Dificultad:** Nivel 4

**Respuesta correcta:** A Elena le tomó 20 minutos llegar a la casa de su tía.



*¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?*

*La utilización de operaciones y el lenguaje simbólico, formal y técnico es la capacidad que permiten al estudiante aplicar sus conocimientos matemáticos para realizar el cálculo solicitado en el problema planteado.*

Figura A4.2. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Emplear*

Problema: ¿Qué velocidad promedio es mayor?

### Actividades cognitivas realizadas en la mente del estudiante

**Diseño de estrategias:** Establece qué hacer  
**Resultado:** *Hallar el tiempo usando el trayecto*

<p><b>Ejecución de estrategias:</b> Realiza lo establecido con los datos.</p> <p><b>Ejemplo 1:</b> <i>Fraciones equivalentes</i></p>	<p><b>Ejecución de estrategias:</b> Realiza lo establecido con los datos.</p> <p><b>Ejemplo 2:</b> <i>Usar la fórmula de velocidad</i></p>	<p><b>Ejecución de estrategias:</b> Realiza lo establecido con los datos.</p> <p><b>Ejemplo 3:</b> <i>Regla de 3 al min y comparar</i></p>
--	--	--

### Resultado obtenido

<p><b>Ejemplo 1:</b></p> $\frac{18}{60} = \frac{6}{20}$	<p><b>Ejemplo 2:</b></p> $v = e \div t$ $18 = 6 \div t$ $1/3 = t$	<p><b>Ejemplo 3:</b></p> <p>18 km en 1 h <math>\rightarrow</math> 6 km en 1/3 de hora: es decir, en 20 min.</p>
---	---	---

El proceso mostrado en la Figura A4.2. se parece al anterior, que cuenta solo con la información necesaria y suficiente para resolver el problema. Por ello, el planeamiento de la estrategia también es directo. Sin embargo, se diferencia del anterior, en la medida que este es más complejo, porque en su resolución se requiere de un cambio de unidad de horas a minutos, así como de la interpretación del resultado para dar la respuesta al problema. Esto lo vemos al tener que interpretar que la fracción 6/20 –que es el resultado– da como respuesta 20 minutos, o al interpretar la respuesta 1/3, que significa un tercio de hora –es decir, 20 minutos–.

En la Figura A4.3., se presenta una pregunta en la que es prioritario el proceso *Emplear*, pero con mayor complejidad.

**Figura A4.3. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en *Emplear***

**Pregunta:**

PM957Q03

Elena fue en bicicleta desde su casa hasta el río, que está a 4 km de distancia. Le tomó 9 minutos. Volvió a casa montando su bicicleta por una ruta más corta (de 3 km de longitud) que solo le tomó 6 minutos.

¿Cuál fue la velocidad promedio de Elena en km/h para el trayecto de ida y vuelta al río?

Velocidad promedio del trayecto: .....km/h

**Esta pregunta, ¿qué evalúa?**

**Indicador:** Calcula la velocidad promedio de dos tramos, a partir de dos distancias recorridas y los tiempos que tomaron.

**Contenido:** Cambio y relaciones

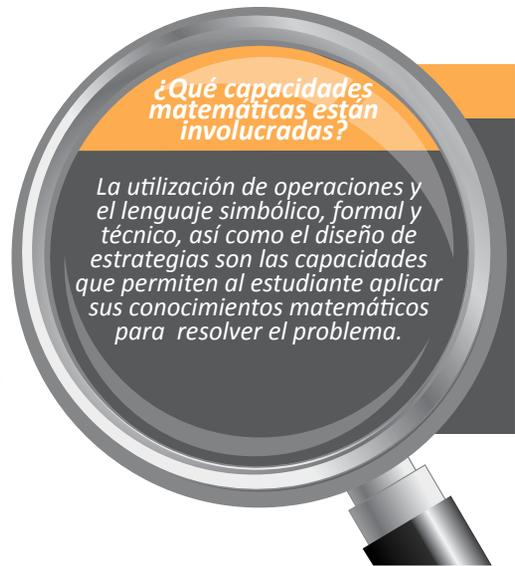
**Proceso:** Emplear

**Contexto:** Personal

**Medida:** 697

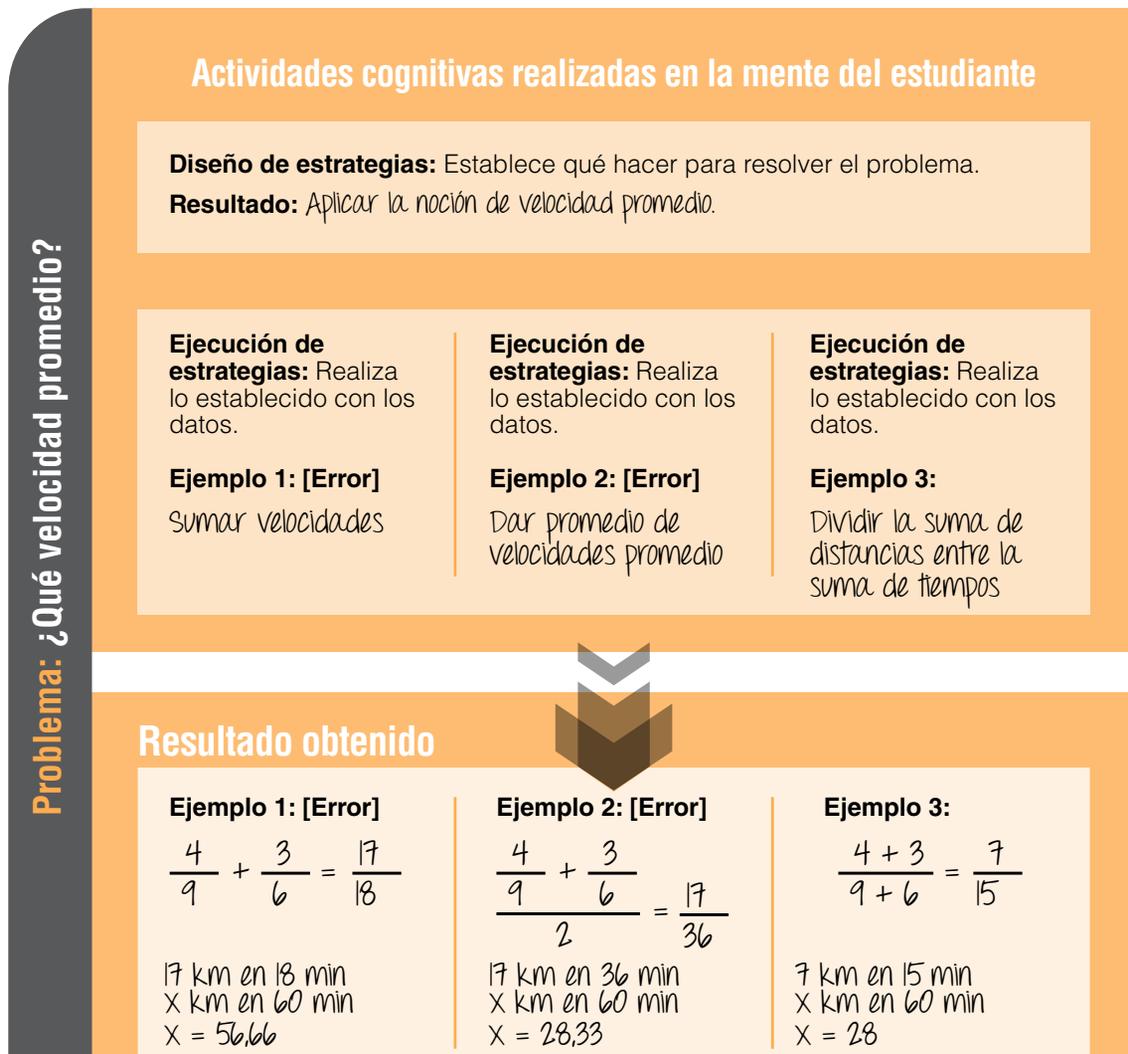
**Dificultad:** Nivel 6

**Respuesta:** correcta 28 km/h

En el siguiente esquema, se presentan dos resultados incorrectos y uno con posibles errores, que radican en el reconocimiento de la noción de promedio.

**Figura A4.4. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en *Emplear***



Aquí, se observa que el diseño de la estrategia implica aplicar correctamente la noción de velocidad promedio. Al comparar esta pregunta con las dos anteriores, se evidencia que los datos son los necesarios y suficientes, pero que –en el proceso de aplicación– es más complejo identificar y aplicar con precisión la noción de velocidad promedio. Esta se puede (y suele) confundir con el promedio de velocidades o con una adición. Adicionalmente a ello, se puede mencionar que, tal como ocurrió con la pregunta del Nivel 3 en el proceso *Emplear*, es necesaria la conversión de unidades y su adecuada interpretación, así como la interpretación final del resultado. Aunque esta se constituya como una tarea menor en comparación con las anteriores, permite dar la respuesta al problema.

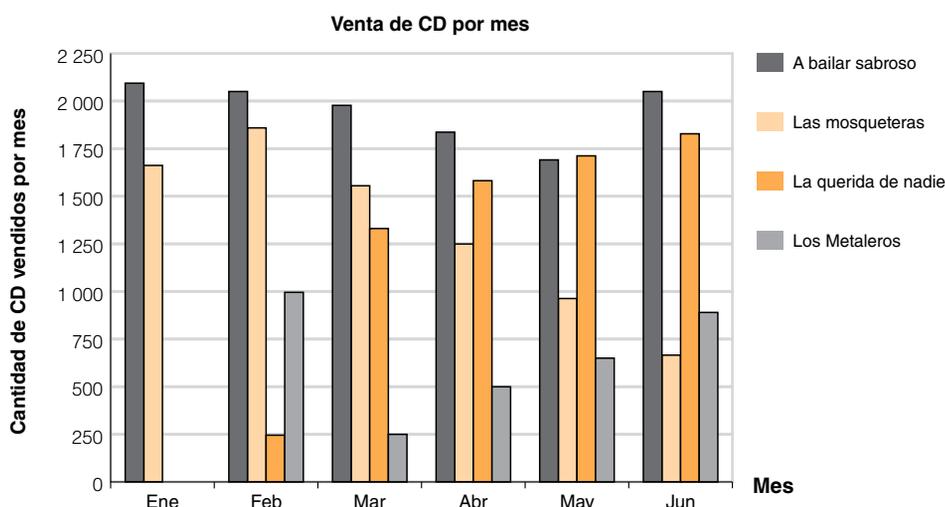
# ANEXO 5

Análisis de otras preguntas de PISA correspondientes a la categoría Proceso; Subcategoría: Interpretar

Figura A5.1. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en *Interpretar*

## LISTA DE ÉXITOS

En enero, los nuevos CD de las bandas *A bailar sabroso* y *Las mosqueteras* salieron a la venta. En febrero, los CD de los grupos *La querida de nadie* y *Los Metaleros* los siguieron. En el siguiente gráfico, se muestra las ventas de los CD de las bandas de enero a junio.



### Pregunta

PM918Q01

¿Cuántos CD vendió el grupo *Los Metaleros* en abril?

- A. 250
- B. 500
- C. 1 000
- D. 1 270

### Esta pregunta, ¿qué evalúa?

- Indicador: Lee un gráfico de barras.
- Contenido: Incertidumbre y datos
- Proceso: Interpretar
- Contexto: Social
- Medida: 348
- Dificultad: Debajo del nivel 1
- Respuesta: correcta : B. 500



La pregunta presentada se encuentra debajo del nivel 1 y es bastante sencilla de resolver por los estudiantes. El proceso fundamental en esta pregunta es *interpretar*. En este caso, se puede desarrollar de la siguiente manera.

**Figura A5.2. Posibles resoluciones de la pregunta con énfasis en Interpretar**



**Figura A5.3. Ejemplo de pregunta PISA con énfasis en Interpretar**

**EL PODER DEL VIENTO**



Villazed está considerando construir algunas estaciones de energía eólica para producir electricidad. El Gobierno de Villazed recabó información acerca del siguiente modelo:

Modelo:	E-82
Altura de la torre:	138 metros
Número de aspas del rotor:	3
Longitud de un aspa del rotor:	40 metros
Máxima velocidad de rotación:	20 rotaciones por minuto
Costo de construcción:	3 200 000 zeds
Utilidad:	0,10 zeds por kWh generado
Costo de mantenimiento:	0,01 zeds por kWh generado
Eficiencia:	Opera el 97% del año

Nota: kilowatt hora (kW h) es una medida de la energía eléctrica.

**Pregunta**

PM922Q01

Determina si las siguientes afirmaciones acerca de la estación de energía eólica E-82 se pueden deducir de la información brindada. Encierra en un círculo “Sí” o “No” en cada afirmación.

Afirmación	¿Se puede deducir esta afirmación a partir de la información brindada?
La construcción de 3 estaciones de energía eólica costará más de 8 000 000 zeds en total.	Sí / No
El costo de mantenimiento de la estación de energía eólica corresponde, aproximadamente, al 5% de su utilidad.	Sí / No
El costo de mantenimiento de la estación de energía eólica depende de la cantidad de kWh generados.	Sí / No
En exactamente 97 días por año, la estación de energía eólica no estará operativa.	Sí / No

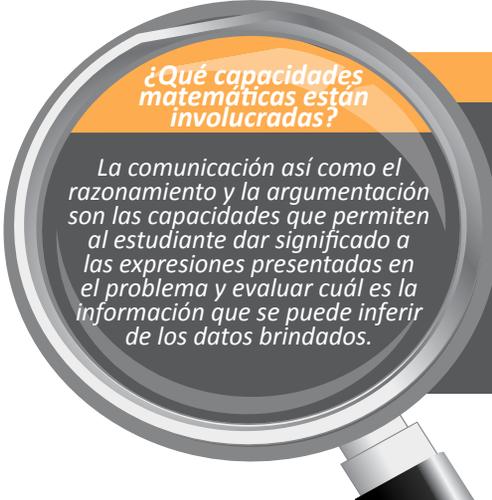
**Esta pregunta, ¿qué evalúa?**

**Indicador:** Analiza información diversa sobre un escenario dado.  
**Contenido:** Cambio y relaciones  
**Proceso:** Interpretar  
**Contexto:** Científico  
**Respuesta:** correcta Sí/No/Sí/No.



**¿Qué capacidades matemáticas están involucradas?**

La comunicación así como el razonamiento y la argumentación son las capacidades que permiten al estudiante dar significado a las expresiones presentadas en el problema y evaluar cuál es la información que se puede inferir de los datos brindados.



# ANEXO 6

## Niveles de desempeño por subcategoría

Para facilitar el análisis de lo que son capaces de hacer los estudiantes por nivel en cada subcategoría, en este informe, se han desagregado las descripciones de niveles que realiza PISA en las tablas que se muestran de la A6.1. a la A6.7. considerando cuatro aspectos que permitan caracterizar el nivel de desempeño en cada caso:

- La naturaleza de la tarea solicitada.
- El registro esperado de la representación, procedimiento o modelo matemático utilizado.
- Las actividades cognitivas realizadas o involucradas
- Por último, posibles *situaciones* asociadas a cada nivel de desempeño.

En este último aspecto, es importante destacar que las situaciones mencionadas en dicha columna, no son exclusivas ni las únicas en cada nivel y que en algunos casos, hay espacios vacíos, puesto que PISA no hace explícita una descripción en ese nivel, pero es posible orientarse por las otras descripciones del mismo nivel.

Adicionalmente, es necesario mencionar que cada una de las tablas presentadas en este anexo son elaboradas recogiendo la propuesta de PISA que para su mayor comprensión han sido desagregadas identificando sus elementos -sin incluir ninguno adicional-, de tal forma que en cada nivel, la característica descrita en cada una de las columnas debe ser leída en conjunto con toda su fila, pues cada nivel solo queda descrito con la combinación de la información que se dan en todas las columnas de dicho nivel.

La desagregación realizada puede contribuir a que usted –como docente- pueda identificar el nivel de una actividad de evaluación según el modelo PISA. Para ello puede seguir el siguiente proceso:

- Empezar asociando la actividad que quiere identificar con la información que se encuentra en una **tabla** en particular.
- Elegir una **columna** y buscar la similitud de la actividad con la información de dicha columna en específico, hasta encontrar una semejanza o cercanía. Si no se encontrara similitud en dicha columna se puede revisar otra.
- Ubicar un indicio del nivel de la actividad examinada al encontrar similitud en la revisión de los otros aspectos presentados la misma **fila**.

De esta forma podrá saber, el posible nivel de su actividad según el modelo de PISA para un proceso o contenido. Observará que en general no existirán coincidencias o exactitud con un nivel determinado, pero si encontrará la posibilidad de optar por un nivel en conjunto.

### 1. Subcategoría: Formular

Como ya se señaló, en esta subcategoría, el núcleo central es la resolución de situaciones problemáticas que demanden el uso, adaptación o creación de una representación o modelo matemático. Los cuatro aspectos para caracterizar cada nivel de desempeño se muestran a continuación:

**Tabla A6.1. Niveles de desempeño en la competencia matemática: Formular**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Representación matemática o modelo matemático esperado	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	Resuelven problemas complejos del mundo real	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo matemático creado, susceptible de investigación</li> <li>Puede incluir formulación algebraica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican una variedad de conocimiento matemático</li> <li>Diseñan una estrategia de múltiples etapas con modelado y cálculos extensos</li> <li>Identifican información relevante que organizan para facilitar la comparación y analizan diversas variables relacionadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucren materiales y cálculo de costos en una variedad de contextos</li> <li>Situaciones con variada información sobre viajes, distancias y velocidades</li> <li>Situaciones que implican el cálculo del área de una región irregular en un mapa</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	Resuelven problemas que requieren recopilar información de diversas fuentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo matemático modificado de acuerdo a las circunstancias del problema</li> <li>Puede incluir términos matemáticos estándar y procesos de cálculo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usan su comprensión de diversas áreas de la Matemática</li> <li>Recodifican matemáticamente información de diferentes representaciones</li> <li>Modifican expresiones algebraicas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que aplican razonamiento proporcional, conceptos estadísticos (aleatoriedad o muestra y probabilidades) y conceptos geométricos (características y propiedades) y patrones geométricos</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	Resuelven problemas que requieren vincular información y representaciones relacionadas del mismo contexto	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expresión matemática que facilita el cálculo o la resolución del problema</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Plantean una ecuación a partir de una descripción textual</li> <li>Determinan un proceso de cálculo secuencial en términos matemáticos en el que se aplican diferentes restricciones</li> <li>Combinan múltiples criterios de decisión para entender o implementar un cálculo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones de ventas, para comparar los precios de artículos, de estimación de áreas o la aplicación de semejanza</li> <li>Situaciones de identificación de una gráfica correspondiente a un fenómeno</li> <li>Situaciones de cálculo de tiempo con información de distancia y velocidad</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	Expresan una relación, incluida la adaptación de expresiones algebraicas en un contexto aplicado	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expresión matemática de una relación, incluyendo la adaptación de expresiones algebraicas sencillas relacionadas con un contexto aplicado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Plantean una estrategia de dos o más pasos</li> <li>Transforman matemáticamente la descripción textual de una relación funcional simple</li> <li>Identifican y extraen información de textos, tablas, gráficos, mapas, secuencias gráficas y otras representaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que se identifican propiedades de las formas o un lugar determinado del mapa</li> <li>Situaciones de costos unitarios, tarifas de pago o de fabricación o de un examen médico en los que se aplica razonamiento proporcional o cálculos de probabilidad</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	Recodifican instrucciones escritas e información de los procesos y tareas sencillos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expresión matemática de un cálculo o del conteo necesario para formar una secuencia (regla de conteo)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaboran una estrategia para hacer coincidir una representación con otra</li> <li>Representan los datos de un texto o una tabla y analizan patrones sencillos</li> <li>Identifican y usan representaciones convencionales o estándar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que permiten comparar costos o calcular el promedio</li> <li>Situaciones de identificación y ampliación de una secuencia numérica, así como de los resultados aleatorios de experimentos</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	Reconocen, modifican y utilizan un modelo explícito sencillo	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de modelo matemático sencillo de forma directa o con ligera modificación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Eligen uno de varios modelos o gráficos para que coincida con la situación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones de compras aplicando modelo aditivo o multiplicativo</li> <li>Situaciones para representar un objeto tridimensional desde objetos bidimensionales o el crecimiento de una población</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 81

## 2. Subcategoría: Emplear

Como ya se señaló, en esta subcategoría, el núcleo central es el uso y aplicación de los conocimientos y habilidades matemáticas.

**Tabla A6.2. Niveles de desempeño en la competencia matemática: Emplear**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Procedimiento esperado registrado por el estudiante	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	Resolver problemas que involucre varias etapas	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaboran y siguen una estrategia de varios pasos</li> <li>Aplican el razonamiento de una manera secuenciada</li> <li>Justifican sus resultados y explican sus conclusiones con argumentos matemáticos bien desarrollados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usan conocimientos y habilidades de procedimientos de varias áreas de la Matemática</li> <li>Generan datos e información pertinentes para analizar los problemas</li> <li>Plantean y resuelven ecuaciones algebraicas con más de una variable</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucren clasificar y analizar datos usando diversos recursos entre ellos una hoja de cálculo</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	Resolver problemas que requieren expresar y trabajar con modelos matemáticos simples de situaciones bien definidas y con restricciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mantienen la precisión en su razonamiento a través de un pequeño número de pasos y procesos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usan una serie de conocimientos y habilidades de una misma área de la Matemática</li> <li>Relacionan y transforman información presentada en distintos formatos: gráfico, esquemático y textual</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que requieren aplicar habilidades de razonamiento espacial y numérico, explorar los resultados combinatorios, trabajar con fórmulas y utilizar el razonamiento proporcional</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)		<ul style="list-style-type: none"> <li>Siguen y describen una estrategia</li> <li>Ejecutan una secuencia de operaciones aritméticas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifican información pertinente a partir de una situación contextualizada</li> <li>Usan fórmulas algebraicas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran el cálculo de distancias, el razonamiento proporcional para hallar un factor de escala, realizar la conversión de unidades o relacionar diferentes escalas gráficas entre sí</li> <li>Situaciones que permiten trabajar de forma flexible con las relaciones distancia-tiempo-velocidad</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)		<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican habilidades de razonamiento visual-espacial que les permiten utilizar propiedades y analizar patrones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan, relacionan y recodifican dos representaciones matemáticas diferentes</li> <li>Usan porcentajes, fracciones y números decimales y trabajar con relaciones proporcionales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran utilizar las propiedades de simetría de una figura, reconocer los patrones gráfico o utilizar los datos de ángulo</li> <li>Situaciones que requieren interpretar o recodificar datos en una tabla a un gráfico o de una expresión algebraica a su representación gráfica, entre otras</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	Resolver problemas que requieren de aplicar pequeños pasos de razonamiento y el uso directo de una información determinada	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican habilidades de razonamiento para comprender y explorar diferentes representaciones gráficas de datos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprenden y usan el valor posicional de números decimales, así como conceptos simples de probabilidad</li> <li>Sustituyen valores en una fórmula simple</li> <li>Reconocen cuál gráfico representa una serie de porcentajes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que implican aplicar un modelo de cálculo sencillo, identificar un error de cálculo o comparar números decimales en un contexto familiar</li> <li>Situaciones que involucran analizar la relación distancia-tiempo o un patrón espacial simple</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	Resuelven problemas que requieren de la aplicación directa y práctica de un procedimiento	<ul style="list-style-type: none"> <li>Siguen un razonamiento directo a partir de información textual dirigido a una estrategia obvia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifican datos simples relacionados y presentados en una tabla o un anuncio, donde el texto y las categorías de datos coinciden directamente</li> <li>Comprenden las técnicas de graficar y las convenciones</li> <li>Utilizan las propiedades de simetría para explorar las características de una figura</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones de descomposición de cantidades de dinero en denominaciones más bajas</li> <li>Situaciones que implican la aplicación de operaciones aritméticas, ordenar y comparar números enteros</li> <li>Situaciones de comparación de longitudes de los lados y ángulos</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 85

### 3. Subcategoría: Interpretar

Como ya se señaló, en esta subcategoría, se hace énfasis en la formulación de conclusiones a partir de información presentada en una situación problemática realista.

**Tabla A6.3. Niveles de desempeño en la competencia matemática: Interpretar**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Procedimiento registrado	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	Responder preguntas contextualizadas y extraer conclusiones argumentadas	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican razonamiento matemático a los datos o informaciones y generan una cadena de pasos que apoyan una conclusión</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relacionan analíticamente múltiples representaciones matemáticas complejas</li> <li>Interpretan dos gráficos de series de tiempo en relación a diferentes condiciones del contexto</li> <li>Presentan sus interpretaciones y conclusiones por escrito</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de un mapa con una escala de información o de una fórmula algebraica compleja en relación con sus variables</li> <li>Situaciones que implican conversiones triples de unidades monetarias o el uso de una herramienta para generar datos y encontrar la información requerida</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	Formular conclusiones a partir de información matemática con respecto a un contexto	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usan varias secuencias de razonamiento y combinan procesos para determinar el enlace con los elementos del contexto identificados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprenden y evalúan un conjunto de representaciones matemáticas, tales como gráficos, con facilidad, para determinar cuál refleja mejor los elementos contextuales bajo análisis</li> <li>Comunican conclusiones y describen significados en forma escrita</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que implican formular o modificar un modelo, resolver una ecuación o realizar cálculos</li> <li>Situaciones que implican vincular el contexto y la Matemática con conceptos geométricos, estadísticos y algebraicos complejos</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	Comparar y extraer conclusiones a partir de información de una situación matemática compleja	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican secuencias de razonamiento adecuadas, posiblemente de múltiples pasos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprenden los objetos matemáticos de la situación, incluyendo expresiones algebraicas</li> <li>Identifican datos estadísticos y probabilísticos, realizan cálculos o manipulan datos en representaciones gráficas complejas</li> <li>Conceptualizan cambios necesarios para un procedimiento de cálculo en respuesta a una restricción cambiante</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran generar datos adicionales para decidir si una restricción -como una condición de medida o una comparación de tamaño- se cumple (hoja de cálculo)</li> <li>Situaciones que involucran la comprensión de hallazgos estadísticos o probabilísticos simples en contextos como el transporte o pruebas médicas que vinculan una información a un aspecto específico del contexto</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	Establecer conexiones para enfocarse e inferir diferentes aspectos de un contexto	<ul style="list-style-type: none"> <li>Combinan pasos de razonamiento sistemáticamente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dan significado y analizan presentaciones de datos relativamente desconocidas para apoyar sus conclusiones</li> <li>Utilizan secuencias de cálculo apropiadas para ayudar a su análisis de los datos y apoyar la elaboración de conclusiones e interpretaciones</li> <li>Exploran y evalúan escenarios alternativos, reconociendo los efectos de cambiar algunas variables observados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran el razonamiento proporcional y el análisis sistemático de varios casos</li> <li>Situaciones que involucran el análisis y la extracción de conclusiones a partir de un gráfico o una tabla con dos series de datos relacionadas entre sí</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	Vincular elementos del contexto del problema a la Matemática	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifican y realizan cálculos necesarios para apoyar comparaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comparan repetidamente casos similares y realizan cálculos apropiados.</li> <li>Extraen datos de un gráfico o tablas</li> <li>Comprenden el significado de una expresión algebraica en un contexto determinado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Costos en diversos contextos</li> <li>Situaciones que involucran aplicar habilidades espaciales básicas para establecer las conexiones entre una situación que se presenta visualmente y sus elementos matemáticos</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	Responder preguntas sobre un contexto descrito y familiar	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dan significado a los datos y la información que se expresa de manera directa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprenden ideas directas de aleatoriedad y de información numérica en un gráfico</li> <li>Comprenden las relaciones entre los gráficos que representan el mismo contexto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que implican reconocer posibles resultados en una lotería o identificar información numérica en un gráfico con una clasificación precisa</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 88

#### 4. Subcategoría: Cantidad

Como ya se señaló, en esta subcategoría, el núcleo central es la resolución de situaciones problemáticas que demanden la cuantificación y el razonamiento cuantitativo en sus múltiples representaciones y aspectos básicos del cálculo y la estimación. Como en los casos anteriores, se ha considerado cuatro aspectos para caracterizar cada nivel de desempeño.

**Tabla A6.4. Niveles de desempeño en la competencia matemática: Cantidad**

Nivel	¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?			
	Tarea solicitada	Procedimiento registrado	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	<p>Resolver problemas que involucren fracciones decimales con precisión.</p> <p>Resolver problemas que requieran un razonamiento avanzado en relación a las proporciones, las representaciones geométricas de las cantidades, la combinatoria y las relaciones entre números enteros.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con modelos de procesos numéricos y relaciones complejas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diseñan estrategias, formulan conclusiones, argumentos y explicaciones precisas.</li> <li>Interpretan y entienden información compleja y relacionan numerosas fuentes de información.</li> <li>Interpretan información gráfica y razonan para identificar, modelar y aplicar un patrón numérico.</li> <li>Analizan y evalúan enunciados interpretativos en base a los datos proporcionados.</li> <li>Planifican e implementan cálculos secuenciales en contextos complejos incluyendo el trabajo con números grandes.</li> <li>Aplican un razonamiento avanzado e interpretan y entienden expresiones formales de relaciones entre números, incluso en el contexto científico.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que incluyan una secuencia de cambio de divisas, introduciendo los valores y redondeando los resultados correctamente.</li> <li>Situaciones que incluyan proporciones, representaciones, combinatoria y relaciones entre números enteros.</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	<p>Resolver problemas que involucren estimaciones basados en sus conocimientos de la vida real y cálculos de diferencias relativas y/o absolutas que incluyen porcentajes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con modelos comparativos e interpretan datos presentados en situaciones que simulan la vida real.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Formulan modelos comparativos que implican comparar resultados y tomar decisiones a partir de la interpretación de información compleja presentada en situaciones que simulan la vida real.</li> <li>Generan datos para dos variables y evalúan los supuestos sobre la relación entre ellos.</li> <li>Comunican sus razonamientos y argumentos basados en el análisis de datos.</li> <li>Estiman basándose en los conocimientos de la vida real.</li> <li>Calculan el cambio relativo y/o absoluto, diferencias relativas y/o absoluta, incluyendo diferencias porcentuales, partiendo de diferencias de datos brutos y convierten unidades.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones de costos en las que comparan resultados para determinar el precio máximo.</li> <li>Situaciones en las que interpretan información en gráficos, dibujos y tablas complejas (dos gráficos con diferentes escalas).</li> <li>Situaciones que incluyen calcular áreas en diferentes unidades.</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	<p>Resolver problemas en las que deban realizar cálculos precisos, aplicar algoritmos que impliquen un razonamiento proporcional, divisiones y porcentajes en situaciones complejas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con modelos numéricos simples que han sido formulados por el estudiante</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan instrucciones y situaciones complejas.</li> <li>Relacionan la información numérica en forma de texto y su representación gráfica.</li> <li>Identifican y utilizan la información numérica de múltiples fuentes de información.</li> <li>Deducen reglas sistemáticas a partir de representaciones.</li> <li>Formulan un modelo numérico simple, establecen modelos de comparación y explican sus resultados.</li> <li>Realizan cálculos precisos de mayor complejidad o repetitivos,</li> <li>Aplican de forma precisa un algoritmo numérico dado incluyendo un determinado número de pasos.</li> <li>Utilizan un razonamiento proporcional en situaciones complejas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones de tiempo, distancia y velocidad de un viaje, en la cual calcula el tiempo utilizando los datos proporcionados sobre la distancia y la velocidad.</li> <li>Situaciones de divisiones o multiplicaciones largas en un contexto.</li> <li>Situaciones en las que suma 13 periodos de tiempo en formato de horas/minutos.</li> </ul>

<p><b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)</p>	<p>Aplicar los procesos básicos de resolución de problemas</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifican y extraen datos presentados en una explicación de datos desconocidos en forma de texto</li> <li>• Comprenden los valores posicionales incluyendo valores mixtos con 2 y 3 cifras decimales</li> <li>• Interpretan una descripción textual de un proceso de cálculo secuencial, textos y diagramas que describan un patrón simple</li> <li>• Elaboran una estrategia simple para analizar las situaciones, entender y trabajar con limitaciones predeterminadas</li> <li>• Utilizan ensayo y error y un razonamiento simple en los contextos conocidos</li> <li>• Calculan con grandes números</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Situaciones que impliquen cálculos con velocidad y tiempo, conversión de unidades (por ejemplo, del ratio anual al ratio diario)</li> <li>• Situaciones que involucren el trabajo con precios; ordenar series cortas de (4) valores decimales; calcular porcentajes de números de hasta 3 dígitos; y aplicar reglas de cálculo en un lenguaje natural.</li> </ul>
<p><b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)</p>	<p>Resolver problemas formulados en un texto</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifican y realizan cálculos necesarios para apoyar comparaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparan repetidamente casos similares y realizan cálculos apropiados.</li> <li>• Extraen datos de un gráfico o tablas</li> <li>• Comprenden el significado de una expresión algebraica en un contexto determinado</li> <li>• Costos en diversos contextos</li> <li>• Situaciones que involucren aplicar habilidades espaciales básicas para establecer las conexiones entre una situación que se presenta visualmente y sus elementos matemáticos</li> </ul>
<p><b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)</p>	<p>Resolver problemas básicos en los que la información relevante se presenta explícitamente, y las situaciones son sencillas y de un ámbito muy reducido</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trabajan con modelos numéricos simples y muy conocidos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Leen e interpretan una tabla de datos simple</li> <li>• Extraen datos y realizan cálculos simples</li> <li>• Usan la calculadora para generar un dato relevante y extrapolan a partir de los datos generados, utilizando el razonamiento y los cálculos en un modelo lineal básico</li> <li>• Situaciones que involucren cálculos obvios, por ejemplo, una operación aritmética simple de un paso o la suma de los totales de una tabla simple y la comparación de resultados.</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 107

### 5. Subcategoría: Cambio y relaciones

Como ya se señaló, en esta subcategoría, correspondiente a la categoría Contenido, el núcleo central es la resolución de situaciones problemáticas que demandan relacionar magnitudes, interpretar sus variaciones y el modo en que se influyen mutuamente.

**Tabla A6.5. Niveles de desempeño en la competencia matemática: Cambio y relaciones**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Registro esperado del estudiante	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	<p>Resolver problemas complejos que incluyen relaciones entre variables.</p> <p>Resolver situaciones problemáticas complejas del mundo real.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con relaciones funcionales (funciones) que incorporan múltiples cantidades y en las cuales crean y utilizan modelos algebraicos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan el razonamiento abstracto y su capacidad de argumentación en un nivel elevado.</li> <li>Utilizan el razonamiento proporcional y realizan cálculos complejos para explorar relaciones numéricas de cambio.</li> <li>Utilizan conocimientos y convenciones técnicas.</li> <li>Aplican conocimientos geométricos profundos para trabajar con patrones complejos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en la que aplican razonamiento proporcional y cálculos complejos donde intervienen porcentajes.</li> <li>Situaciones con patrones complejos donde utilizan conocimientos geométricos profundos.</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	<p>Resolver situaciones complejas incluso en el contexto científico.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con relaciones funcionales que incluyen utilizar modelos algebraicos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan el razonamiento proporcional complejo para trabajar con razones, fórmulas y desigualdades.</li> <li>Utilizan habilidades complejas y de múltiples etapas además de reflejar y comunicar su razonamiento y su argumentación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que requieren evaluar y predecir el efecto cuantitativo del cambio de una variable a partir de otra, en una fórmula.</li> <li>Situaciones en las que trabajan con razones, fórmulas y expresiones como las desigualdades.</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	<p>Resolver problemas que incluyen relaciones funcionales simples entre variables.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modifican un modelo funcional o gráfico para aplicar un cambio específico en una situación.</li> <li>Trabajan con representaciones múltiples (incluidos los algebraicos) asociados directamente a situaciones que simulan la vida real.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Razonan sobre las relaciones funcionales simples entre las variables.</li> <li>Interpretan y razonan sobre una relación funcional con cierta flexibilidad.</li> <li>Comunican explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones y acciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que explora relaciones de distancia – tiempo – velocidad.</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	<p>Resolver problemas que incluyen seleccionar y aplicar estrategias de solución sencillas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con información procedente de dos representaciones relacionadas entre sí (texto, gráfico, tabla, fórmula).</li> <li>Modifican un modelo funcional o gráfico para adaptarlo a una situación nueva simple.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan y utilizan razonamientos directos en contextos cotidianos.</li> <li>Demuestran tener algunas habilidades para comunicar sus argumentaciones.</li> <li>Utilizan una serie de procedimientos de cálculo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en la que deben ordenar datos, sustituir valores en una fórmula o interpolar linealmente.</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	<p>Resolver problemas en contextos sencillos que implican cantidades relacionadas entre sí.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con relaciones simples expresadas en forma de texto o números, relacionando el texto con una representación singular de esta relación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Localizan la información relevante sobre la relación de los datos en una tabla o gráfico.</li> <li>Interpretan y razonan en un contexto sencillo que implica cantidades relacionadas entre sí.</li> <li>Comparan directamente sobre los datos proporcionados en una tabla o gráfico.</li> <li>Reflexionan sobre el significado básico de una relación simple expresada en forma de texto o números.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que relacionan un gráfico específico con un proceso de cambio.</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	<p>Resolver problemas de contextos conocidos relacionados con relaciones claramente expresadas.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplican cálculos simples en relaciones claramente expresadas.</li> <li>Evalúan los enunciados sobre una relación expresada directamente en una fórmula o gráfico.</li> <li>Reflexionan sobre expresiones simples o cambios que se producen en situaciones conocidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en la que identifica valores en una situación conocida expresada de forma clara y directa.</li> </ul>

Adaptado de “PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science”, por OECD, 2013a, p. 100

## 6. Subcategoría: Espacio y forma

Como ya se señaló, en esta subcategoría, correspondiente a la categoría Contenido, el núcleo central es la resolución de situaciones problemáticas vinculados con la forma de los objetos del entorno, sus propiedades y características.

**Tabla A6.6 Niveles de desempeño en la competencia matemática: Espacio y forma**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Registro esperado del estudiante	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	Resolver problemas complejos que incluyen representaciones múltiples o cálculos Resolver problemas que involucran conocimientos procedimentales y matemáticos.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifican, extraen y relacionan información relevante en situaciones complejas.</li> <li>Utilizan el razonamiento espacial y la reflexión para formular modelos geométricos.</li> <li>Aplican conocimientos procedimentales basados en conocimientos matemáticos.</li> <li>Generalizan resultados y conclusiones, comunican soluciones y proporcionan justificaciones y argumentos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que deben calcular el área o la distancia extrayendo las dimensiones relevantes de un diagrama o mapa incluyendo la interpretación de una escala.</li> <li>Situaciones que involucran conocimientos matemáticos tales como el círculo geométrico, trigonometría, teorema de Pitágoras o las fórmulas de área y volumen.</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	Resolver problemas que requieren la elaboración de hipótesis. Resolver problemas utilizando teoremas y conocimientos procedimentales.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaboran hipótesis o razonan a partir de hipótesis proporcionadas, teniendo en cuenta las limitaciones establecidas.</li> <li>Aplican teoremas y conocimientos procedimentales.</li> <li>Utilizan razonamiento espacial y argumentos para inferir conclusiones relevantes, interpretar y relacionar diferentes representaciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que deben analizar el plano de una sala y sus muebles.</li> <li>Situaciones que involucran teoremas y conocimientos procedimentales tales como las propiedades de la simetría, del triángulo equilátero o las fórmulas para calcular el área, perímetro o volumen de formas conocidas.</li> <li>Situaciones en las relaciona diferentes representaciones como identificar una dirección o ubicación en un mapa a partir de información textual.</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	Resolver problemas de múltiples pasos, en contextos desconocidos y usando los conocimientos de matemática básica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Vinculan e integran diferentes representaciones de objetos geométricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan el razonamiento espacial y visual y la argumentación en contextos desconocidos.</li> <li>Aplican conocimientos de matemática básica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran conocimientos de matemática básica, tales como la relación entre el ángulo y la longitud del lado de un triángulo.</li> <li>Situaciones en las que debe analizar estructuras de objetos de tres dimensiones en dos diferentes perspectivas de la misma; y pueden comparar objetos usando las propiedades geométricas.</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	Resolver problemas que implican razonamiento espacial y visual básico en contextos cotidianos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relacionan diversas representaciones de objetos conocidos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan el razonamiento espacial y visual básico, en contextos cotidianos.</li> <li>Elaboran estrategias sencillas y aplican propiedades básicas.</li> <li>Utilizan apropiadamente técnicas de cálculo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran un razonamiento espacial y visual básico tales como el cálculo de una distancia o una dirección de un mapa o de un dispositivo GPS.</li> <li>Situaciones en las que aplican las propiedades básicas de los triángulos y los círculos.</li> <li>Situaciones que involucran escalas de conversión necesarias para analizar distancias en un mapa.</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	Resolver problemas vinculados a una sola representación geométrica en contextos cotidianos.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Evalúan y comparan características espaciales de objetos conocidos en situaciones donde aplican restricciones.</li> <li>Comprenden y esbozan conclusiones en relación a propiedades geométricas básicas claramente presentadas y a las limitaciones asociadas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que implican una sola representación geométrica como diagramas o gráficos</li> <li>Situaciones tales como la comparación de la altura o circunferencia de dos cilindros que tienen la misma área de superficie.</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	Resolver problemas simples en contextos cotidianos usando imágenes o dibujos de objetos geométricos familiares.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan habilidades espaciales básicas, tales como el reconocimiento elemental de propiedades o el uso de procedimientos,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que involucran el reconocimiento elemental de las propiedades de la simetría, la comparación de longitudes o medidas de ángulos, o el uso de procedimientos, tales como la disección de formas.</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 103

### 7. Subcategoría: Incertidumbre y datos

Como ya se señaló, en esta subcategoría, correspondiente a la categoría Contenido, el núcleo central es la organización de la información mediante tablas y gráficos, así como las relaciones de probabilidad de eventos.

**Tabla A6.7 Niveles de desempeño en la competencia matemática: Incertidumbre y datos**

¿Qué pueden hacer los estudiantes en este nivel?				
Nivel	Tarea solicitada	Registro esperado del estudiante	Actividades cognitivas realizadas	Situaciones
<b>6</b> (de 669 a más)	Resolver problemas con varios elementos que involucran datos estadísticos o probabilísticos en situaciones complejas.  Resolver problemas probabilísticos mediante la formulación de técnicas de cálculo.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan, evalúan y reflexionan críticamente sobre datos estadísticos o probabilísticos en situaciones complejas.</li> <li>Aplican conocimientos y razonamientos sujetos a varios elementos de un problema.</li> <li>Comprenden y utilizan las conexiones entre la información y las situaciones que representan.</li> <li>Formulan técnicas de cálculo apropiadas para explorar datos o resolver problemas probabilísticos</li> <li>Producen y comunican conclusiones, razonamientos y explicaciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que a partir de la interpretación correcta de la información deben argumentar sus resultados.</li> </ul>
<b>5</b> (de 607 hasta menos de 669)	Resolver problemas en contextos complejos que requieren vincular diferentes componentes del problema.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan y analizan datos e información en situaciones estadísticas o probabilísticas en contextos complejos.</li> <li>Utilizan el razonamiento proporcional para vincular los datos de una muestra a la población a la que representan.</li> <li>Interpretan adecuadamente series de datos a través del tiempo, y son sistemáticos en su uso y en su exploración.</li> <li>Reflexionan, sacan conclusiones y comunican resultados al utilizar conceptos y conocimientos estadísticos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que analizan e interpretan información en situaciones de comparación de promedios y argumenta su resultado.</li> </ul>
<b>4</b> (de 545 hasta menos de 607)	Resolver problemas que implican elaborar representaciones de una serie de datos y procesos probabilísticos y estadísticos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan datos e información estadística de dos representaciones relacionadas tales como gráficos o tablas de datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaboran y emplean representaciones de una serie de datos y procesos probabilísticos y estadísticos.</li> <li>Interpreta datos entre dos representaciones relacionadas. (gráficos o tablas de datos)</li> <li>Elaboran conclusiones enmarcadas en un contexto mediante razonamientos estadísticos y probabilísticos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que se presentan restricciones tales como las condiciones que podrían aplicarse en un experimento de muestreo.</li> </ul>
<b>3</b> (de 482 hasta menos de 545)	Resolver problemas donde interpretan información estadística de una sola o dos representaciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con datos e información estadística de una sola representación o de dos representaciones de datos relacionados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretan estadística descriptiva, conceptos probabilísticos y convenciones en contextos del azar y formulan conclusiones.</li> <li>Formulan conclusiones a partir de datos de una situación</li> <li>Realizan razonamientos básicos de estadística y probabilidad en contextos sencillos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones que incluyen datos e información estadística de una sola representación que a su vez puede incluir varias fuentes (como un gráfico representando diversas variables).</li> <li>Situaciones que incluyen datos e información estadística de dos representaciones de datos relacionados (como una tabla o gráficos de datos simples).</li> </ul>
<b>2</b> (de 420 hasta menos de 482)	Resolver problemas que incluyen datos presentados en una forma simple y cotidiana.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con representaciones simples y de contexto cotidiano.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifican, extraen y comprenden datos estadísticos presentados en forma simple y cotidiana.</li> <li>Interpretan información en representaciones simples.</li> <li>Aplican procedimientos de cálculo que conectan directamente la información proporcionada con los contextos del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones sencillas que presentan datos estadísticos en tablas, gráficos de barras o gráfico circular.</li> <li>Situaciones en contextos cotidianos como las de lanzar monedas o tirar dados y en las que utilizan conceptos probabilísticos y de estadística descriptiva.</li> </ul>
<b>1</b> (de 358 hasta menos de 420)	Resolver problemas en las que le solicitan identificar y leer información bien etiquetada en tablas pequeñas o en gráficos simples.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trabajan con representaciones simples y directas que no consideran información distractora.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocen y utilizan conceptos básicos de aleatoriedad.</li> <li>Localizan y extraen valores de datos específicos de forma directa y responden preguntas claramente definidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Situaciones en las que identifican errores de concepto en contextos experimentales conocidos, tales como los resultados de la lotería.</li> </ul>

Adaptado de "PISA 2012 results. What students can know and can do. Vol I. Student Performance in Mathematics, Reading and Science", por OECD, 2013a, p. 110



---

**Ministerio de Educación**

**Calle Del Comercio 193,  
San Borja - Lima, Perú  
Telf: (511) 615-5800**

**<http://www.minedu.gob.pe/>**

---